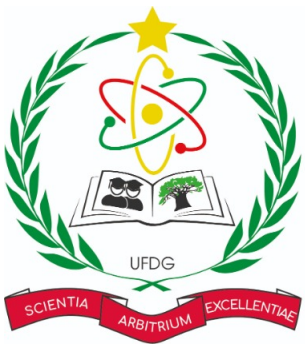
Introduction aux Équations aux Dérivées Partielles
Étude théorique

Dr. SIMPORE

Février 2024



UNIVERSITE DE
FADA N'GOURMA

Table des matières

1 Equations différentielles **3**
- 1.1 équations différentielles – Systèmes linéaires . . . 3
- 1.2 ́quations différentielles . . . 3
  - 1.2.1 Définitions . . . 3
  - 1.2.2 équation différentielle du premier ordre à variables séparables . . . 3
  - 1.2.3 Définition (équation différentielle de Bernouilli) . . . 4
  - 1.2.4 équations différentielles d'ordre 2 . . . 7
  - 1.2.5 équations différentielles homogènes . . . 10
  - 1.2.6 équations différentielles de Ricatti . . . 10
- 1.3 Système différentiel linéaire . . . 10
  - 1.3.1 Structure des solutions . . . 11

2 Introduction aux Équations aux Dérivées Partielles linéaires **13**
- 2.1 E.D.P. de type transport . . . 13
  - 2.1.1 Définition et exemples . . . 13
  - 2.1.2 Transport le long des courbes caractéristiques . . . 15
  - 2.1.3 Problème des conditions aux limites . . . 16
- 2.2 E.D.P. linéaires du second ordre . . . 18
  - 2.2.1 Définitions . . . 18
  - 2.2.2 Éléments de classification : E.D.P. elliptiques, hyperboliques et paraboliques . . . 20

3 Quelques résolutions théoriques d'E.D.P **23**
- 3.1 L'espace $L^2(0,T)$ . . . 23
  - 3.1.1 Définitions . . . 23
  - 3.1.2 Convergence en moyenne quadratique . . . 24
  - 3.1.3 Systèmes orthogonaux dans $L^2(0,T)$ . . . 24
- 3.2 Équation de la chaleur . . . 24
  - 3.2.1 Solution fondamentale de l'équation de la chaleur . . . 25
  - 3.2.2 Résolution de l'équation de la chaleur par séparation des variables . . . 27
- 3.3 Équations des ondes . . . 30
  - 3.3.1 Résolution de l'équation des cordes vibrantes par séparation des variables . . . 30
  - 3.3.2 Séparation des variables dans le cas $2D$ . . . 32

1

Equations différentielles

1.1 équations différentielles – Systèmes linéaires

1.2 ḳuations différentielles

1.2.1 Définitions

Définition 1.2.1 *On appelle équation différentielle toute relation de la forme*

$$f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

entre la variable réelle x, la fonction y et les dérivées de cette derniére jusqu'à l'ordre n.
Une fonction y de classe C^n est appelée fonction intégrale de l'équation

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

si et seulement si elle est solution de cette équation.
Intégrer une équation différentielle c'est la résoudre, c'est-à-dire chercher l'ensemble de toutes les solutions.

Définition 1.2.2 *On appelle équation différentielle du premier ordre, à variables séparables ou à variables séparées, une équation de la forme $y'f(y) = g(x)$.*

1.2.2 équation différentielle du premier ordre à variables séparables

$$y'f(y) = g(x) \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}f(y) = g(x) \Rightarrow f(y)dy = g(x)dx$$
$$\Rightarrow \int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx$$

Exemple

Intégrer l'équation différentielle : $y'ye^{2y} = \cos x + e^x$

On a :

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx}ye^{2y} = \cos x + e^x &\Rightarrow ye^{2y}\,dy = (\cos x + e^x)\,dx\\ &\Rightarrow \int ye^{2y}\,dy = \int (\cos x + e^x)\,dx\\ &\Rightarrow \frac{1}{2}ye^{2y} - \frac{1}{2}\int e^{2y}\,dy = \sin x + e^x + K\\ &\Rightarrow \frac{1}{2}ye^{2y} - \frac{1}{4}e^{2y} = \sin x + e^x + K\\ &\Rightarrow \frac{1}{2}e^{2y}\left(y - \frac{1}{2}\right) = \sin x + e^x + K\end{aligned}$$

Exemple 2

$$xy' = y + x\sin\frac{y}{x} \Rightarrow y' = \frac{y}{x} + \sin\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

1.2.3 Définition (équation différentielle de Bernouilli)

Définition 1.2.3 *On appelle équation différentielle de Bernouilli, une équation différentielle de la forme $y' + a(x)y = b(x)y^\alpha$ (ou $c(x)y' + a(x)y = b(x)y^\alpha$), avec $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$*

Résolution d'une équation différentielle de Bernouilli

Soit $(E) : y' + a(x)y = b(x)y^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0,1\}$

Si $y \neq 0$ et ses puissances sont définies, on pose : $z = y^{1-\alpha} \Leftrightarrow z = \dfrac{y}{y^\alpha} \Leftrightarrow y = zy^\alpha$; on en déduit :

$$z' = (1-\alpha)y'y^{-\alpha} \Rightarrow y' = \frac{1}{1-\alpha}z'y^\alpha$$

et donc, (E) devient :

$$\frac{1}{1-\alpha}z'y^\alpha + a(x)zy^\alpha = b(x)y^\alpha \Leftrightarrow \frac{1}{1-\alpha}z' + a(x)z = b(x)$$

On obtient une équation linéaire du premier ordre. Les solutions nulles éventuelles se vérifient séparément.

Exemple

Soit l'équation : $x^2y' = y^2 - xy$

Posons : $z = \dfrac{1}{y}$, i.e. $y = \dfrac{1}{z}$ et donc $y' = \dfrac{-z'}{z^2}$; on obtient alors :

$$\begin{aligned}x^2\left(\frac{-z'}{z^2}\right) = \frac{1}{z^2} - x\times\frac{1}{z} &\Leftrightarrow \frac{-x^2z'}{z^2} = \frac{1}{z^2} - \frac{xz}{z^2}\\ &\Leftrightarrow \frac{1}{z^2}\left(-x^2z' + xz\right) = \frac{1}{z^2} \Leftrightarrow -x^2z' + xz = 1\end{aligned}$$

On se ramène encore ici à une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Dans ce qui suit, nous nous attellerons à résoudre ce type d'équations différentielles.

Définition 1.2.4 *Une équation différentielle linéaire du premier ordre est une équation différentielle de la forme $a(x)y' + b(x)y = c(x)$, où a, b, c sont continues sur un intervalle I, avec $a(x) \neq 0$ sur I.*
Elle est dite homogène, ou sans second membre lorsque $c(x) = 0,\ \forall x \in I$.

Théorème 1.2.1 Les solutions de l'équation différentielle $a(x)y' + b(x)y = c(x)$ s'écrivent sous la forme $y_h + y_p$, où y_h parcourt les solutions de $a(x)y' + b(x)y = 0$ et y_p est une solution particulière de l'équation de départ.

Remarque
Dans les intégrales suivantes, on fixe $x_0 \in I$.

Résolution de l'équation différentielle homogène

Soit $(E) : a(x)y' + b(x)y = c(x)$; l'équation différentielle homogène associée à (E) est (E_h) : $a(x)y' + b(x)y = 0$. Elle se résout tel qu'il suit :

$$\begin{aligned}
a(x)y' + b(x)y = 0 \Leftrightarrow a(x)y' = -b(x)y \Leftrightarrow a(x)\frac{dy}{dx} &= -b(x)y \\
\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{b(x)}{a(x)}dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} &= -\int \frac{b(x)}{a(x)}dx \\
\Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)}\,dt + \alpha \quad &\text{avec } \alpha \in \mathbb{R} \\
\Rightarrow |y| = \exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)}\,dt + \alpha\right) &= e^{\alpha}\exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)}\,dt\right) \\
\Rightarrow y = \pm e^{\alpha}\exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)}\,dt\right) & \\
\Rightarrow y = c.\exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)}\,dt\right) \quad &\text{avec } c = \pm e^{\alpha} \in \mathbb{R}^*
\end{aligned}$$

comme $y = 0$ est une solution évidente de (E_h), il vient :

$$y = c.\exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)}\,dt\right) \text{ avec } c \in \mathbb{R}$$

Exemple
Soit $(E) : x(x+1)y' - (x+2)y = 2x$.

Intégrer l'équation sans second membre (E_h) de (E).

$$\begin{aligned}
(E_h): x(x+1)y' - (x+2)y = 0 &\Leftrightarrow x(x+1)y' = (x+2)y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{x+2}{x(x+1)}\,dx \\
&\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2x+2-x}{x(x+1)}\,dx \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx \\
&\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx \\
&\Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| - \ln|x+1| + \alpha \\
&\Rightarrow \ln|y| = \ln|x|^2 - \ln|x+1| + \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} \\
&\Rightarrow \ln|y| = \ln\left|\frac{x^2}{x+1}\right| + \alpha = \ln\left|\frac{x^2}{x+1}\right| + \ln c,\ c > 0 \\
&\Rightarrow \ln|y| = \ln\left|c \times \frac{x^2}{x+1}\right| \\
&\Rightarrow |y| = \left|c \times \frac{x^2}{x+1}\right| \Leftrightarrow y = \pm c\frac{x^2}{x+1} \\
&\Rightarrow y = K\frac{x^2}{x+1},\ K \in \mathbb{R}^*
\end{aligned}$$

$y = 0$ est une solution évidente de (E_h), donc :

$$y = K\frac{x^2}{x+1};\ K \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0\}$$

Méthode de la variation de la constante (Recherche d'une solution particulière)

Partant de la solution de l'équation homogène, on remplace la constante K par une fonction $K(x)$, autrement dit on cherche la solution particulière

$$y_p = K(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)}\,dt\right)$$

c'est-à-dire

$$y_p' = K'(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)}\,dt\right) - \frac{b(x)}{a(x)}K(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)}\,dt\right)$$

En remplacant dans l'équation initiale (E), y_p et y_p' par leur expressions respectives on obtient :

$$(E): a(x)\left[K'(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)}\,dt\right) - \frac{b(x)}{a(x)}K(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)}\,dt\right)\right] + b(x)K(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)}\,dt\right) = c(x)$$

d'où

$$a(x)K'(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)}\,dt\right) - b(x)K(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)}\,dt\right) + b(x)K(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)}\,dt\right) = c(x)$$

i.e.

$$a(x)K'(x)\exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)}\,dt\right) = c(x) \Rightarrow K'(x) = \frac{c(x)}{a(x)}\exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{b(t)}{a(t)}\,dt\right)$$

On aura une solution particulière si l'on prend une primitive K de K' tel que définit ci-dessus.

Exemple

Déterminons une solution particulière de

$$(E): x(x+1)y' - (x+2)y = 2x$$

Théorème – Définition (Probléme de Cauchy)

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point ; a, b et f trois fonctions continues sur I, avec $a(x) \neq 0$, et (E) l'équation $a(x)y' + b(x)y = f(x)$.

Le *problème de Cauchy* associé au couple (x_0, y_0) de $I \times \mathbb{R}$, est la recherche des solutions de (E) vérifiant les conditions initiales (ou conditions de Cauchy) : $y(x_0) = y_0$.

Le problème de Cauchy admet une unique solution. Une seule courbe intégrale définie sur I passe par le point (x_0, y_0) de $I \times \mathbb{R}$.

Exemple

Int'egrer l'équation différentielle

$$\begin{cases} y' \sin x - y \cos x + \cos^2 x = 0 \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$$

1.2.4 équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Définition 1.2.5 *Ce sont des équations de la forme $ay'' + by' + cy = f(x)$, où a, b et c sont des constantes données ($a \neq 0$), et f, une fonction donnée sur un intervalle I.*
L'équation est dite homogène lorsque $f(x) = 0$, $\forall x \in I$.
Les solutions de l'équation s'écrivent sous la forme $y_h + y_p$, où y_h est la solution de l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$, et y_p une solution particulière de l'équation de départ.

Résolution de l'équation homogène

On rappelle que l'équation homogène est donnée par

$$(E_h) : ay'' + by' + cy = 0$$

On appelle équation caractéristiques de l'équation différentielle homogène, l'équation du second ordre

$$ar^2 + br + c = 0$$

Les solutions de l'équation homogène (E_h) dépendent du signe du discriminant de l'équation caractéristique. On distingue trois cas :

* Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2, et

  $$y_h = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x};\ A, B \in \mathbb{R}$$

  est la solution de (E_h)
* Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique admet une racine double $r_0 = \dfrac{-b}{2a}$, et

  $$y_h = (Ax + B)e^{r_0 x};\ A, B \in \mathbb{R}$$

  est la solution de (E_h)
* Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique admet deux racines complexes $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$, et

  $$y_h = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x);\ A, B \in \mathbb{R}$$

  est la solution de (E_h)

Recherche d'une solution particulière

Soit $(E) : ay'' + by' + cy = f(x); (a,b,c) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^2$
Dans tout le tableau ..., P_n, Q_n et Z_n désignent des polynomes, tous de degré n.
De plus, k, c et d sont des réels et (E_c) est l'équation caractéristique associée à (E).

Forme du second membre $f(x)$	Forme de y_p, solution particulière de (E)
$P_n(x)$, avec $c \neq 0$	$Q_n(x)$
$P_n(x)$, avec $c = 0$ et $b \neq 0$	$xQ_n(x)$
$P_n(x)$, avec $c = b = 0$	$x^2 Q_n(x)$
$P_n(x)e^{kx}$, avec k non racine de (E_c)	$Q_n(x)e^{kx}$
$P_n(x)e^{kx}$, avec k racine simple de (E_c)	$xQ_n(x)e^{kx}$
$P_n(x)e^{kx}$, avec k racine double de (E_c)	$x^2 Q_(x)e^{kx}$
$P_n(x)e^{cx}\cos(dx)$, avec $c+id$ non racine de (E_c)	$e^{cx}[Q_n(x)\cos(dx) + Z_n(x)\sin(dx)]$
$P_n(x)e^{cx}\sin(dx)$, avec $c+id$ non racine de (E_c)	$e^{cx}[Q_n(x)\cos(dx) + Z_n(x)\sin(dx)]$
$P_n(x)e^{cx}\cos(dx)$, avec $c+id$ racine de (E_c)	$xe^{cx}[Q_n(x)\cos(dx) + Z_n(x)\sin(dx)]$
$P_n(x)e^{cx}\sin(dx)$, avec $c+id$ racine de (E_c)	$xe^{cx}[Q_n(x)\cos(dx) + Z_n(x)\sin(dx)]$

Proposition 1.2.1 *(Méthode de superposition)*
Soit $(E) : ay'' + by' + cy = f(x)$.
Si $f(x)$ (le second membre) est de la forme $f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$, où chaque f_i est les produit d'un polynome et d'une fonction exponentielle, ou le produit d'un polynome et d'une fonction sin ou cos, on doit chercher une solution particulière y_{p_i} de chaque équation différentielle $ay'' + by' + cy = f_i(x)$. Pour cela, on utilise le tableau ci-dessus.
Une solution particulière de l'équation (E) est alors donnée par :

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_n}$$

Exemple
Intégrer les équations différentielles suivantes :
$(E_1) : y'' - 2y' + y = \left(x^2 + 1\right)e^x$;
$(E_2) : y'' + \omega^2 y = x\sin 2x$;
$(E_3) : y'' - y = x^2 \sinh(x)$

1. $(E_1) : y'' - 2y' + y = \left(x^2 + 1\right)e^x$
   L'équation caractéristique est $(E_c) : r^2 - 2r + 1 = 0$, et elle admet $r = 1$ pour solution double. La solution de l'équation homogène est donc

   $$y_h = (Ax + B)e^x$$

   Le second membre de l'équation initiale étant sous la forme $P(x)e^{kx}$, avec $P(x) = x^2 + 1$ et $k = 1$ racine double du polynome caractéristique, le solution particulière de (E_1) est sous la forme

   $$y_p = x^2\left(ax^2 + bx + c\right)e^x = \left(ax^4 + bx^3 + cx^2\right)e^x$$

Et on a donc :

$$y_p' = \left(4ax^3 + 3bx^2 + 2cx\right)e^x + \left(ax^4 + bx^3 + cx^2\right)e^x$$

et

$$y_p'' = \left(12ax^2 + 6bx + 2c\right)e^x + \left(4ax^3 + 3bx^2 + 2cx\right)e^x + \left(4ax^3 + 3bx^2 + 2cx\right)e^x + \left(ax^4 + bx^3 + cx^2\right)e^x$$

avec la solution particulière, (E_1) devient :

$$\left(12ax^2 + 6bx + 2c\right)e^x = \left(x^2 + 1\right)e^x$$

et on en déduit, par identification :

$$\begin{cases} 12a = 1 \\ 6b = 0 \\ 2c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{12} \\ b = 0 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi, la solution de (E_1) est :

$$y_G = y_h + y_p = x^2\left(\frac{x^2}{12} + \frac{1}{2}\right)e^x + (Ax + B)e^x, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

2. $(E_2) : y'' + \omega^2 y = x\sin 2x,\ \omega > 0$
L'équation homogène de (E_2) est $(E_h) : y'' + \omega^2 y = 0$ et l'équation caractéristique de (E_h) est

$$(E_c) : r^2 + \omega^2 = 0$$

avec $r_1 = -i\omega$ et $r_2 = i\omega$ pour solutions. La solution homogène est donc de la forme

$$y_h = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$$

Le second membre de (E_2) est de la forme $P_n(x)e^{cx}\sin(dx)$, avec
$P_n(x) = x,\ c = 0$ et $d = 2$

Proposition 1.2.2 *De facon générale, si $y_h = Ax_1(t) + Bx_2(t)$, avec $x_1(t)$ et $x_2(t)$ linéairement indépendantes (les familles $\{e^{r_1 x}, e^{r_2 x}, r_1 \neq r_2\}$ et $\{\cos(\beta x), \sin(\beta x)\}$, $\beta \neq 0$ sont linéairement indépendantes), on cherche y_p sous la forme $y_p = A(t)x_1(t) + B(t)x_2(t)$, où A et B sont des fonctions soumises à la condition $A'(t)x_1(t) + B'(t)x_2(t) = 0$.*
Les fonctions A et B sont obtenues en résolvant le système

$$\begin{cases} A'(t)x_1(t) + B'(t)x_2(t) = 0 \\ A'(t)x_1'(t) + B'(t)x_2'(t) = f(t)/a \end{cases}$$

dont le déterminant

$$\omega(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) \end{vmatrix}$$

ne s'annule pas lorsque $x_1(t)$ et $x_2(t)$ sont linéairement indépendantes.
On obtient

$$A'(t) = -\frac{x_2(t)f(t)}{a\omega(t)} \quad et \quad B'(t) = \frac{x_1(t)f(t)}{a\omega(t)}$$

1.2.5 équations différentielles homogènes

Ce sont des équations différentielles de la forme

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

On pose $t = \frac{y}{x} \Rightarrow y = tx$ et $y' = t'x + t$. Pour $x \neq 0$ et $f(t) \neq t$, l'équation $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ devient

$$t'x + t = f(t) \Leftrightarrow \frac{dt}{dx}x + t = f(t) \Leftrightarrow \frac{dt}{dx}x = f(t) - t$$
$$\Leftrightarrow \frac{dt}{f(t)-t} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{dt}{f(t)-t} = \int \frac{dx}{x}$$

Les solutions $y = cx$ avec $f(c) = c$ sont à ajouter.

Exemple

Intégrer : $xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2}$

1.2.6 équations différentielles de Ricatti

Ce sont des équations différentielles de la forme

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$$

où a, b et c sont des fonctions réelles définies sur un intervalle. Ces équations se ramènent à une équation de Bernouilli si l'on connait une solution particulière y_1, et ce, en faisant le changement de la fonction inconnue $y = y_1 + z$. Nous obtenons l'équation différentielle de la forme

$$z' = a(x)z^2 + (2a(x)y_1(x) + b(x))z$$

Exemple

Résoudre l'équation différentielle

$$y' = \frac{y^2}{x} - \left(2 + \frac{1}{x}\right)y + x + 2$$

1.3 Système différentiel linéaire à coefficients constants

Définition 1.3.1 *Un système de p équations différentielles du premier ordre, à coefficients constants est de la forme*

$$(S)\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1(t) + \cdots + a_{1p}x_p(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ x_p'(t) = a_{p1}x_1(t) + \cdots + a_{pp}x_p(t) + b_p(t) \end{cases}$$

les b_i sont des fonctions continues sur un intervalle I, et $X(t) = \left(x_1(t), \ldots, x_p(t)\right)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{pmatrix} \quad et \quad B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_p(t) \end{pmatrix}$$

(S) s'écrit sous la forme $X'(t) = A.X(t) + B(t)$
Si $B(t)$ est égale à zéro, le système est dit homogène.

1.3.1 Structure des solutions

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle linéaire homogène
$X'(t) = A.X(t)$ est un espace vectoriel (H) de dimension p.
Toute solution du système $(S) : X'(t) = A.X(t) + B(t)$ est la somme de la solution générale de l'équation homogène et de la solution particulière.

Cas où A est diagonalisable

Soit A diagonalisable, notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ ses valeurs propres, et $\left(V_1, \ldots, V_p\right)$ une base de $\mathbb{R}^p$ de vecteurs propres associés. L'espace vectoriel du système homogène admet pour base

$$\left(V_1 e^{\lambda_1 t}, V_2 e^{\lambda_2 t}, \ldots, V_p e^{\lambda_p t}\right)$$

Résolution

Par réduction, on a $A = PDP^{-1}$ où D est diagonale.
Si l'on pose $Y(t) = P^{-1}X(t)$ et $C(t) = P^{-1}B(t)$, on obtient

$$X'(t) = A.X(t) + B(t) \Rightarrow X'(t) = PDP^{-1}.X(t) + B(t)$$

et, en multipliant par P^{-1}, il vient :

$$P^{-1}X'(t) = P^{-1}\left(PDP^{-1}\right)X(t) + P^{-1}B(t) \Leftrightarrow P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t) + P^{-1}B(t)$$

or $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$ et $C(t) = P^{-1}B(t)$
le système devient $(E) : Y'(t) = DY(t) + C(t)$
On résout le système (E) et on déduit que $X(t) = PY(t)$

Exemple
Soient

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

deux matrices carrées d'ordre 3.

1. Calculer AP et en déduire que A est diagonalisable.
2. Résoudre le système différentiel

$$(S) : \begin{cases} x'(t) = y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) + z(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$$

3. Calculer e^A

Résolution

1.
$$A \times P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Déduisons-en que A est diagonalisable :
posons $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
à partir du produit $A \times P$, on remarque que :
$A \times U_1 = -U_1 \Rightarrow$ U_1 est un vecteur propre de A ; c'est le vecteur associé à la valeur propre -1
$A \times U_2 = 2U_2 \Rightarrow$ U_2 est un vecteur propre de A ; c'est le vecteur associé à la valeur propre 2
$A \times U_3 = -U_3 \Rightarrow$ U_3 est un vecteur propre de A ; c'est le vecteur associé à la valeur propre -1
Les vecteurs propres U_1 et u_3 associés à la valeur propre -1 sont linéairement indépendants, avec $V(-1) = \text{vect}(U_1, U_3) \Rightarrow \dim\{V(-1)\} = 2$, et $V(2) = \text{vect}(U_2) \Rightarrow \dim\{V(2)\} = 1$; d'où, comme A est une matrice carrée d'ordre 3, on conclut que A est diagonalisable, et que dans la base $B = (U_1, U_2, U_3)$, A est semblable à

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Résolvons le système

$$(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \Leftrightarrow X'(t) = A.X(t)$$

avec $X(t) = (x(t), y(t), z(t))$
posons $Y(t) = P^{-1}X(t)$, i.e. $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$
il vient :
$X'(t) = PDP^{-1}X(t) \Leftrightarrow P^{-1}X'(t) = DP^{-1}X(t) \Leftrightarrow Y'(t) = DY(t)$
$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_1(t) \\ y_2'(t) = 2y_2(t) \\ y_3'(t) = -y_3(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1(t) = c_1 e^{-t} \\ y_2(t) = c_2 e^{2t} \\ y_3(t) = c_3 e^{-t} \end{cases} \Rightarrow Y(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 e^{2t} \\ c_3 e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$X(t) = PY(t) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} \\ c_2 e^{2t} \\ c_3 e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} \\ -2c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - c_3 e^{-t} \\ c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^{2t} & 0 \\ -2e^{-t} & e^{2t} & -e^{-t} \\ e^{-t} & e^{2t} & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

3. Déterminons e^A

2

Introduction aux Équations aux Dérivées Partielles linéaires

On peut difficilement étudier les équations aux dérivées partielles (E.D.P.) dans une totale généralité comme on peut le faire pour les équation différentielles ordinaires (E.D.O.) le domaine étant trop vaste. Heureusement, les E.D.P. les plus intéressantes proviennent de la modélisation d'un nombre restreint de phénomènes :

- Le transport : convection de chaleur dans un liquide, convection d'un polluant dans l'atmosphère ...
- La diffusion : diffusion de la chaleur dans un solide ...
- Les vibrations : son dans l'air, vibration des structures ...
- L'équilibre : calcul de l'équilibre d'une structure soumise à des forces...

Nous verrons qu'à chacun de ces phénomènes correspond une catégorie d'E.D.P.. L'étude est restreinte aux E.D.P. linéaires (en fait affines) d'ordre inférieur ou égal à 2.

Une référence bibliographique : H. Reinhard, "équations aux dérivées partielles, introduction", Dunod Université.

2.1 E.D.P. de type transport

2.1.1 Définition et exemples

On appelle E.D.P. linéaire d'ordre 1 dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et d'inconnue

$$\Phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},$$

une E.D.P. de la forme

$$F(x).\nabla\Phi(x) + g(x)\Phi(x) = h(x) \tag{2.1}$$

où $\nabla\Phi(x)$ est le vecteur gradient de Φ, $(\nabla\Phi(x))_i = \dfrac{\partial\Phi(x)}{\partial x_i}$ et $F(x) = (f_1(x), ..., f_N(x))$,
Soit encore :

$$f_1(x)\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}(x) + f_2(x)\frac{\partial\Phi}{\partial x_2}(x) + ... + f_N(x)\frac{\partial\Phi}{\partial x_N}(x) + g(x)\Phi(x) = h(x) \tag{2.2}$$

Exemple : L'équation de continuité de la mécanique des fluides :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}(t,x) + div\,(\rho(t,x)U(t,x)) = 0 \tag{2.3}$$

pour une vitesse $U(t,x) : [0,T]\times\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ connue, c'est à dire en considérant que l'inconnue est la densité

$$\rho(t,x) : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(t,x_1,x_2,x_3) \longmapsto \rho(t,x_1,x_2,x_3)$$

En effet, l'équation se récrit

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}(t,x) + U(t,x).\nabla\rho(t,x) + \rho(t,x)divU(t,x) = 0. \tag{2.4}$$

ATTENTION : Dans cette écriture que l'on rencontre en mécanique ou en physique, les notations $divU(t,x)$ ou $\nabla\rho(t,x)$ concernent uniquement les dérivées en espace et non la dérivée en temps,

$$divU(t,x) = \frac{\partial U_1}{\partial x_1}(t,x) + \frac{\partial U_2}{\partial x_2}(t,x) + \frac{\partial U_3}{\partial x_3}(t,x) \quad \text{et} \quad \nabla\rho(t,x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial\rho}{\partial x_1}(t,x) \\ \frac{\partial\rho}{\partial x_2}(t,x) \\ \frac{\partial\rho}{\partial x_3}(t,x) \end{pmatrix}$$

Il est facile de constater que l'on a

$$div\,(\rho(t,x)U(t,x)) = U(t,x).\nabla\rho(t,x) + \rho(t,x)divU(t,x).$$

Finalement, l'équation de continuité se met dans le cadre général avec :

$$\Phi = \rho, \qquad F = \begin{pmatrix} 1 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix}, \qquad g = divU.$$

Les E.D.P. linéaires d'ordre 1 sont des E.D.P. de type transport. Dans l'exemple précédent, il s'agit du transport de la masse par le champ de vitesse $U(t,x)$. Le terme $h(x)$ est appelé terme source. Dans le cas de l'équation de continuité, il n'y a pas de terme source de masse.

Courbes caractéristiques

On considère les courbes paramétrées de $\mathbb{R}^N$

$$x(s) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^N$$
$$s \longmapsto (x_1(s), x_2(s), ..., x_N(s))$$

On note

$$\dot{x}(s) = \left(\frac{dx_1}{ds}(s), \frac{dx_2}{ds}(s), ..., \frac{dx_N}{ds}(s)\right),$$

la tangente à la courbe dont on suppose qu'elle est partout non nulle.

Définition 2.1.1 *On dira que la courbe paramétrée $x(s)$ est une courbe caractéristique de l'E.D.P.*

$$F(x).\nabla\Phi(x) + g(x)\Phi(x) = h(x),$$

si et seulement si $\dot{x}(s)$ est partout colinéaire au champ $F(x(s))$. En pratique, on cherchera les courbes paramétrées $x(s)$ vérifiant :

$$\dot{x}(s) = F(x(s)).$$

Ces courbes sont appelées aussi lignes de courant du champ de vecteur F.

Remarque 2.1.1 *A partir d'une courbe $x(s)$ vérifiant*

$$\dot{x}(s) = \lambda(s)F(x(s))$$

(avec $\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continu et $\lambda(s) \neq 0$, il est toujours possible de fabriquer une courbe $\bar{x}(t)$ telle que

$$\dot{\bar{x}}(t) = F(\bar{x}(t))$$

(i.e en prenant $\lambda(t) \equiv 1$dans la définition précédente) qui représente la même courbe. Il suffit pour cela de faire un changement de variable

$$t \longmapsto s(t), \qquad \text{tel que} \quad \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\lambda(s)},$$

$$\text{car alors} \qquad \frac{d}{dt}x(s(t)) = \dot{x}(s(t))\frac{1}{\lambda(s(t))} = F(x(s(t)))$$

et on pose $\bar{x}(t) = x(s(t))$.

2.1.2 Transport le long des courbes caractéristiques

Soit $x(s)$ une courbe caractéristique vérifiant

$$\dot{x}(s) = F(x(s)),$$

alors la solution $\Phi(x)$ vérifie le long de cette courbe

$$\frac{d}{ds}\Phi(x(s)) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}(x(s))\dot{x}_i(s) = \nabla\Phi(x(s)).\dot{x}(s) = \nabla\Phi(x(s)).F(x(s)) = h(x(s)) - g(x(s))\Phi(x(s)).$$

- Cas $g(x) \equiv h(x) \equiv 0$
  On a alors $\dfrac{d}{ds}\Phi(x(s)) = 0$. Dans ce cas donc, la solution $\Phi(x)$ est constante le long de la courbe caractéristique. On dit que Φ est transportée le long des courbes caractéristiques.
- Cas général où $g(x) \neq 0$ et $h(x) \neq 0$
  Si $s \longmapsto \Phi(x(s))$ vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d}{ds}\Phi(x(s)) = \nabla\Phi(x(s)).F(x(s)) = h(x(s)) - g(x(s))\Phi(x(s))$$

  C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 dont on peut obtenir la solution par variation de la constante.

En conclusion, si la valeur de Φ est connue en un point $x(s_0)$ de la courbe caractéristique, on peut calculer sa valeur partout. Résoudre ce genre de problème consiste donc principalement à trouver les courbes caractéristiques.

Si F est localement lipschitzien et non nul, une unique courbe intégrale maximale passe par chaque point x du domaine. Les courbes caractéristiques "remplissent" tout le domaine.
Exemple : Retour sur l'équation de continuité.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(t,x) + div\,(\rho(t,x)U(t,x)) = 0,$$

où la vitesse $U(t,x)$ est supposée connue. On a vu que cette équation se met dans le cadre général avec $F = (1 \quad U_1 \quad U_2 \quad U_3)^\intercal$ et $g = div(U)$.
Les courbes caractéristiques sont les courbes $s \longmapsto \begin{pmatrix} t(s) \\ x(s) \end{pmatrix}$, qui sont telles que

$$\frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{dx_1}{ds} = U_1, \quad \frac{dx_2}{ds} = U_2, \quad \frac{dx_3}{ds} = U_3.$$

On prend ici $t = s$ et on a $\dot{x}(s) = U(s, x(s))$. Les courbes qui vérifient ceci sont tout simplement les trajectoires des particules de fluide. Cette équation traduit le fait que la masse est transportée le long des trajectoires des particules. On a de plus le long des trajectoires

$$\rho(t,x(t)) = \rho(0,x(0))\exp\left(-\int_0^t div_x U(v,x(v))dv\right).$$

En particulier la densité ρ augmente quand $divU < 0$ (il y a alors compression) et diminue lorsque $divU > 0$ (il y a alors dilatation). L'opérateur $divU$ mesure les changements de volume.
Équations à coefficients constants
C'est le cas où F ne dépend pas de x. Mais alors les courbes caractéristiques sont de la forme $\dot{x}(s) = F$, c'est-à-dire

$$x(s) = x_0 + sF$$

Ce sont des droites de $\mathbb{R}^N$ parallèles entre elles.

2.1.3 Problème des conditions aux limites

On a vu que pour toute courbe caractéristique $x(s)$ de l'E.D.P., la connaissance de la valeur en un point de cette courbe suffit à connaître la solution sur toute la courbe caractéristique. On peut donc énoncer le principe suivant

> Pour déterminer complètement une solution de l'E.D.P. il faut et il suffit de fixer la valeur de cette solution sur un point et un seul de chaque courbe caractéristique.

En pratique, on fixera la valeur de la solution sur une courbe/surface qui croise une et une seule fois chaque courbe caractéristique.
Exemple

a) Sur l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(t,x) + div\,(\rho(t,x)U(t,x)) = 0,$$

on a vu que les courbes caractéristiques étaient les trajectoires des points du fluide continu.
Or à chaque instant t, toutes les particules sont représentées. Donc pour déterminer ρ de manière unique, il suffit de connaître ρ à un instant donné, par exemple à l'instant initial $t = 0$.

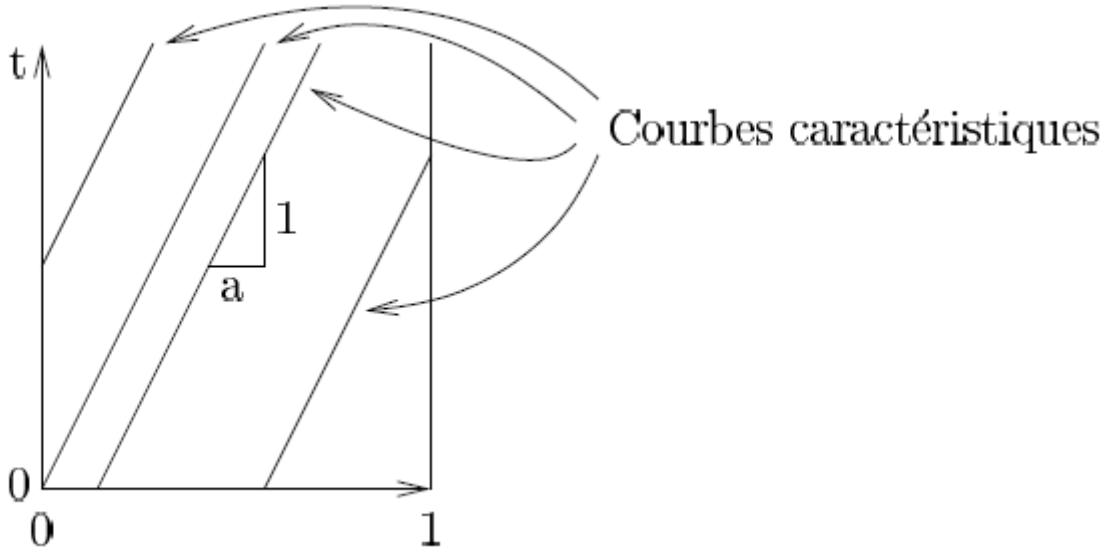
b) On considère l'équation à coefficients constants

$$\frac{\partial y}{\partial t}(t,x) + a\frac{\partial y}{\partial x}(t,x) = 0, \quad x \in [0,1], \quad t \geq 0,$$

avec $a > 0$ fixé. Dans ce cas, les caractéristiques sont les droites

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_0 \\ x_0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$$

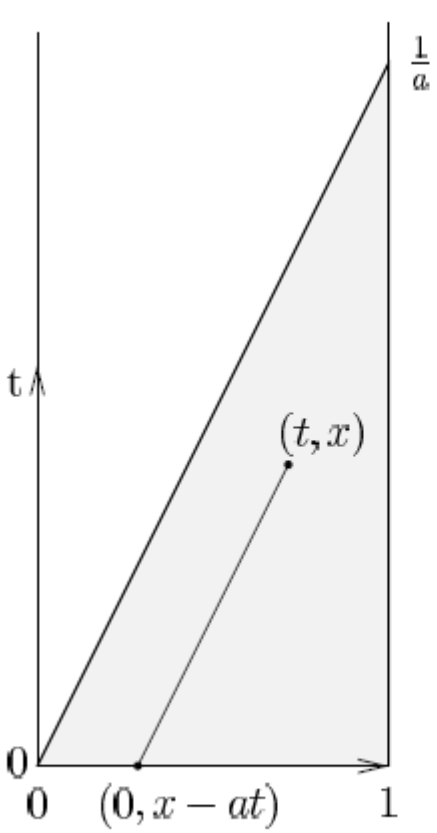
et la solution $y(t,x)$ est constante sur ces droites caractéristiques.



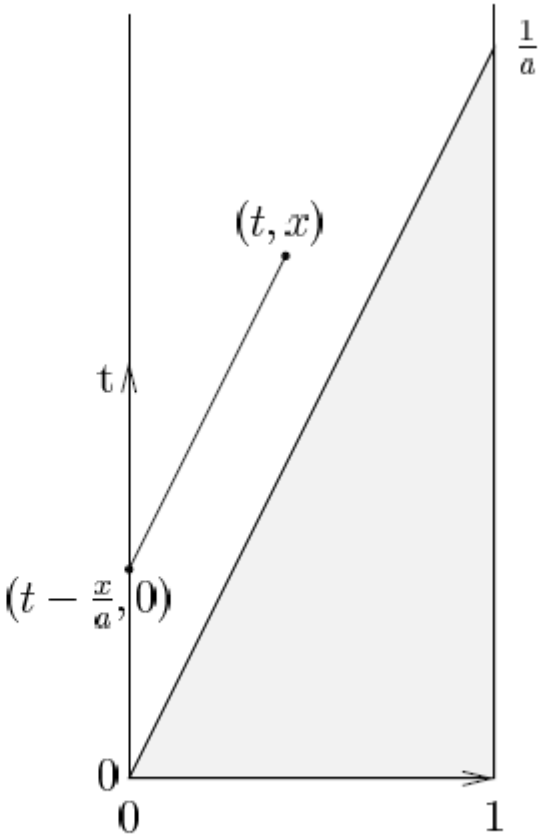
Comme souvent dans les problèmes évolutif, supposons que l'on se donne une condition initiale

$$y(0,x) = y_0(x), \qquad \text{où} \qquad y_0(x) \qquad \text{est donnée.}$$

Alors la valeur de $y(t,x)$ est fixée sur la partie (t,x) telle que $t \leq \frac{x}{a}$. Dans cette partie, on a $y(t,x) = y(0,x-at) = y_0(x-at)$.



Cas $t \leq \frac{x}{a}$



Cas $t > \frac{x}{a}$

Dans la partie $t > \frac{x}{a}$ la solution n'est pas déterminée, il faut donc une autre condition aux limites. On ne peut pas prendre une condition sur $\{x = 1\}$sinon il y a conflit pour $t \leq \frac{x}{a}$.
On va imposer par exemple une condition aux limites en $\{x = 0\}$

$$y(t,0) = y_1(t), \qquad \text{où} \qquad y_1(t) \qquad \text{est donnée.}$$

Pour $t > \frac{x}{a}$ on aura donc $y(t,x) = y(t - \frac{x}{a}, 0) = y_1(t - \frac{x}{a})$.
Globalement, la courbe sur laquelle on impose des conditions aux limites est

$$\{t = 0\} \times \{x \in [0,1]\} \cup \{t \geq 0\} \times \{x = 0\},$$

elle respecte bien le principe de couper une et une seule fois chaque courbe caractéristique de l'E.D.P.

2.2 E.D.P. linéaires du second ordre

2.2.1 Définitions

Définition 2.2.1 *On appelle E.D.P. linéaire d'ordre inférieur ou égal à 2 dans un domaine* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *et d'inconnue*

$$\Phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

une équation du type

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ji}(x)\frac{\partial^2\Phi(x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_i f_i(x)\frac{\partial\Phi(x)}{\partial x_i} + g(x)\Phi(x) = h(x) \tag{2.5}$$

Par convention, on supposera que $a_{ji}(x) = a_{ij}(x)$.

$h(x)$ est souvent appelé terme source de l'équation.
$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est le lieu où l'on étudie l'équation. N est la dimension, i.e. aussi le nombre de variables dont dépend Φ. Il pourra varier de 2 à 4. Dans la suite, on écrira

$$\Phi(x)$$

où $x \in \Omega$ admet N composantes, notées $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$. On écrira aussi indifféremment

$$\Phi(x_1, x_2, ..., x_N).$$

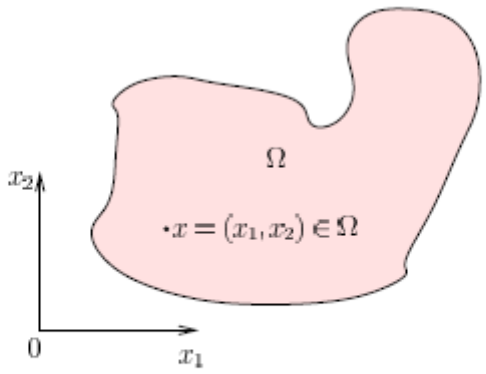


FIGURE 2.1 – Exemple de domaine dans $\mathbb{R}^2$.

Écriture vectorielle
On introduit les notations suivantes :

- $A(x) = (a_{ij})_{1\le i,j\le N}$ la matrice $N \times N$ symétrique des coefficients devant les termes d'ordre 2.
- $F(x) = (f_i(x))_{1\le i\le N}$ le vecteur de taille N des coefficients devant les termes d'ordre 1.
- $H\Phi(x)$ la matrice Hessienne de Φ, $(H\Phi(x))_{ij} = \dfrac{\partial^2\Phi(x)}{\partial x_i \partial x_j}$.
- $\nabla\Phi(x)$ le vecteur gradient de Φ, $(\nabla\Phi(x))_i = \dfrac{\partial\Phi(x)}{\partial x_i}$.

ainsi que la notation (appelée produit scalaire de Frobenius)

$$A : B = \sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j} b_{i,j}$$

où A et B sont deux matrices de composantes respectivement $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$.
Avec ceci l'E.D.P. d'ordre 2 se réécrit

$$A(x) : H\Phi(x) + F(x).\nabla\Phi(x) + g(x)\Phi(x) = h(x).$$

Exemple : pour l'équation

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}(x,y)+\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y)=\sin(x+y),\qquad \text{pour}\quad x,y\in\mathbb{R},$$

on aura

$$A=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix},\qquad F=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\qquad g(x,y)=0,\qquad h(x,y)=\sin(x+y),$$

$$\nabla\Phi(x)=\begin{pmatrix}\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,y)\\ \frac{\partial\Phi}{\partial y}(x,y)\end{pmatrix},\qquad H\Phi(x)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}(x,y) & \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x}(x,y) & \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}(x,y)\end{pmatrix}.$$

Pour les E.D.P. linéaires d'ordre 2, la matrice A est non nulle et est symétrique. Elle est donc diagonalisable à valeurs propres réelles et leur étude fournit des éléments de classification des E.D.P linéaires d'ordre 2.

2.2.2 Éléments de classification : E.D.P. elliptiques, hyperboliques et paraboliques

Au second ordre, le symbole principal définit les caractéristiques. On distingue trois types : "elliptique", "hyperbolique" et "parabolique".

Remarque 2

La terminologie renvoie à la classification des coniques et quadriques. Dans le cas parabolique, un terme linéaire suivant la direction du noyau est nécessaire pour obtenir une parabole ou un paraboloïde.

E.D.P. elliptiques

Définition 2.2.2 *Une E.D.P. linéaire du second ordre est dite elliptique en $x\in\Omega$ si la matrice $A(x)$ n'admet que des valeurs propres* **non nulles** *et qui sont* **toutes de même signe**.

Si l'E.D.P. est elliptique sur tout le domaine d'étude Ω elle modélise en général un problème d'équilibre ou un problème stationnaire.

Exemple d'applications

- L'équation

  $$\triangle\Phi(x)=f(x)$$

  (où $\triangle\Phi(x)=\sum_1^N\frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}$ est le laplacien de $\Phi(x)$)est elliptique, car la matrice $A(x)$ correspondante est

  $$A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & 1\end{pmatrix}$$

  matrice identité de $\mathbb{R}^N$. Toutes les valeurs propres sont donc égales à 1.

- Plus généralement, les équations de la forme

$$div(k(x)\nabla\Phi(x)) = f(x),$$

avec $k(x) > 0$ sont elliptiques.

E.D.P. hyperboliques

Définition 2.2.3 *Une E.D.P. est dite hyperbolique en $x \in \Omega$ si $A(x)$ n'admet que des valeurs propres* **non nulles** *et qui sont* **toutes de même signe sauf une de signe opposé.**

Si l'E.D.P. est hyperbolique sur tout le domaine d'étude Ω elle modélise en général une propagation d'onde. **Exemples d'application**

- L'équation des ondes

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(t,x) - c^2\triangle\Phi(t,x) = f(t,x), \qquad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

est de type hyperbolique ($\triangle\Phi(t,x) = \sum_1^N \frac{\partial^2\Phi}{\partial x_i^2}$ est le laplacien de $\Phi(t,x)$ par rapport à x). En effet la matrice $A(x)$ vaut dans ce cas

$$A(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -c^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -c^2 \end{pmatrix}$$

dont une valeur propre vaut 1 et toutes les autres $-c^2$.

- Plus généralement, les équations du type

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(t,x) - div\,(c(x)\nabla\Phi(t,x)) = f(t,x), \qquad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

est de type hyperbolique $c(x) > 0$.

E.D.P. paraboliques

Définition 2.2.4 *On dira que l'E.D.P. est parabolique en $x \in \Omega$ si $A(x)$ admet $N-1$ valeurs propres* **non nulles** *de même signe et* **une valeur propre nulle**. *De plus, soit $v(x)$ le vecteur propre associé à la valeur propre nulle, on doit avoir $v(x).F(x) \neq 0$.*

Si la condition $v(x).F(x) \neq 0$ n'est pas vérifiée, alors l'équation est dégénérée (c'est un couplage entre une E.D.P. est une équation algébrique) et on ne parle plus d'équation parabolique. Si l'E.D.P. est parabolique sur tout le domaine d'étude Ω elle modélise en général un phénomène de diffusion.

Exemples d'application

- L'équation de la chaleur

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,x) - k\triangle\Phi(t,x) = f(t,x), \qquad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

est de type parabolique. En effet, dans ce cas

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -k \end{pmatrix}$$

admet une valeur propre nulle, toutes les autres valant $-k$. La valeur propre 0 correspond à la valeur propre temporelle. De plus $F = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, la condition $v(x).F(x) \neq 0$ est vérifiée.

- Plus généralement, les équations du type

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,x) - div\,(k(x)\nabla\Phi(t,x)) = f(t,x), \qquad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

sont paraboliques pour $k(x) > 0$.

3

Quelques résolutions théoriques d'E.D.P

3.1 L'espace $L^2(0,T)$

3.1.1 Définitions

Définition 3.1.1 *L'ensemble $L^2(0,T)$ désigne les fonctions f à valeurs réelles ou complexes, telles que $|f|^2$ est intégrable sur $[0,T]$; c'est à dire :*

$$L^2(0,T) = \{f : (0,T) \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable}, \int_0^T |f(x)|^2 dx < +\infty\}$$

Cet ensemble, muni de l'addition usuelle des fonctions et de la multiplication par un scalaire, est un espace vectoriel.
On définit sur l'ensemble $L^2(0,T)$ un produit scalaire pour f et g dans $L^2(0,T)$ par

$$\langle f,g\rangle = \int_0^T f(x)\bar{g}(x)dx.$$

On dit que deux fonctions f et g sont orthogonales si

$$\langle f,g\rangle = \int_0^T f(x)\bar{g}(x)dx = 0.$$

La norme associée à ce produit scalaire est définie pour $f \in L^2(0,T)$ par :

$$\|f\|^2_{L^2(0,T)} = \langle f,f\rangle = \int_0^T |f|^2(x)dx.$$

Cette norme est aussi appelée moyenne quadratique.

Proposition 3.1.1 *L'espace vectoriel $\left(L^2(0,T),+,.\right)$ muni de la norme $\|f\|_{L^2(0,T)} = \sqrt{\langle f,f\rangle}$ est, modulo égalité presque partout, un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$.*

On remarque, que la norme de f peut être nulle sans que f soit nulle (par exemple si f est nulle sauf en un nombre fini de points). Pour obtenir une vraie norme, on va dire qu'une fonction est nulle presque partout lorsque l'intégrale de la valeur absolue de cette fonction est nulle, c'est à dire :

Définition 3.1.2

$$f = 0 \text{ presque partout } \Longleftrightarrow \int_0^T |f|^2(x)dx = 0 \Longleftrightarrow \|f\|^2_{L^2(0,T)} = 0.$$

$$f = g \text{ presque partout } \Longleftrightarrow f - g = 0 \text{ presque partout .}$$

On considérera comme nulle dans $L^2(0,T)$ une fonction nulle presque partout et on considérera que deux fonction de $L^2(0,T)$ sont égales lorsqu'elles sont égales presque partout.

3.1.2 Convergence en moyenne quadratique

Définition 3.1.3 *Soit une suite de fonctions donnée par $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $f_n \in L^2(0,T)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On dit que cette suite de fonctions converge en moyenne quadratique (ou converge dans $L^2(0,T)$) lorsqu'il existe $f \in L^2(0,T)$ telle que :*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \|f_n - f\|_{L^2(0,T)} = 0.$$

3.1.3 Systèmes orthogonaux dans $L^2(0,T)$

Définition 3.1.4 *Une ensemble $S = \{\psi_0, \psi_1, ..., \psi_k, ...\}$ d'éléments d'un espace préhilbertien H est un système orthogonal si $\psi_i \perp \psi_j \forall i \neq j$. Il est orthonormal si de plus $\|\psi_i\| = 1, \quad \forall \psi_i \in S$.*

Proposition 3.1.2 *Dans un espace de Hilbert H, un système orthogonal d'éléments non nuls est un système linéairement indépendant.*

3.2 Équation de la chaleur

Les équations paraboliques sont de type équation de dissipation, on les rencontre la plupart du temps sous la forme d'une équation évolutive du type

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t,x) - div\,(q(x)\nabla_x \Phi(t,x)) = h(t,x),$$

où $q(x) > 0$. Le terme $div\,(q(x)\nabla_x \Phi(t,x))$ est un terme elliptique par rapport à la variable x. Nous allons étudier l'équation unidimensionnelle, avec $q(x) = k$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = h(t,x), \qquad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

3.2.1 Solution fondamentale de l'équation de la chaleur

On considère l'équation de la chaleur sur $\mathbb{R}$ sans terme source

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, \qquad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x), \qquad \text{où} \quad u_0(x) \quad \text{est donnée.} \end{cases} \tag{3.1}$$

On voudrait voir l'évolution d'une quantité de chaleur unitaire concentrée en $x = 0$.
La quantité de chaleur portée par u_0 (en supposant que la capacité calorifique est $C_\rho = 1$) est donnée par

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x)dx,$$

que l'on veut égale à 1 avec une concentration autour de 0. On pourrait prendre une concentration sur un petit intervalle autour de 0, mais on aurait à choisir la taille de ce petit intervalle. On préfère idéaliser cela en prenant

$$u_0(x) = \delta_0(x),$$

la masse de Dirac en $x = 0$. On a alors le résultat suivant

Proposition 3.2.1 *La solution de l'équation de la chaleur*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, \qquad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = \delta_0(x), \qquad \textit{où} \quad u_0(x) \quad \textit{est donnée.} \end{cases} \tag{3.2}$$

est $u(t,x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi k t}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$. *On appelle cette solution, la solution élémentaire de l'équation de la chaleur. On la note* $\theta_k(t,x)$

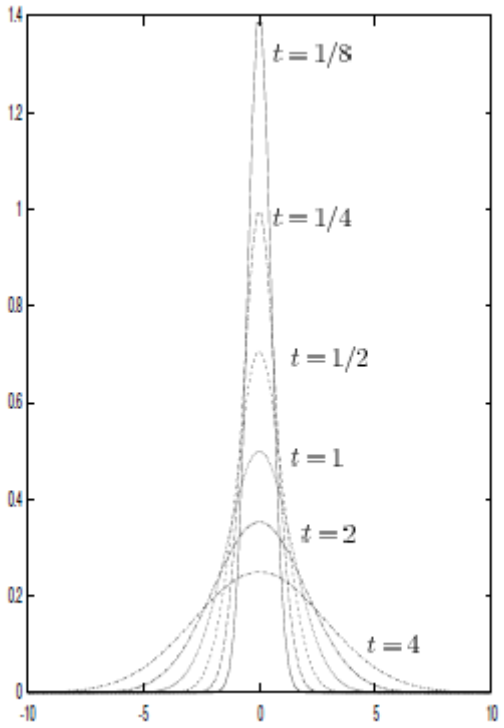
Preuve 1 *La fonction* $\theta_k(t,x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi k t}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}$ *est appelée distribution gaussienne autour de* 0 *(elle a une grande importance en statistique). Elle vérifie*

$$\int_{\mathbb{R}} \theta_k(t,x)dx = 1,$$

ce qui est compatible avec la conservation de la quantité de chaleur. On peut le vérifier par le calcul suivant

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/l}dx = \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)/l}\,dxdy\right)^{1/2} = \left(\int_0^{2\pi}\int_0^{+\infty} e^{-r^2/l} r\,dr d\theta\right)^{1/2}$$
$$= \left(2\pi\frac{l}{2}\int_0^{+\infty} e^{-s}\,ds\right)^{1/2} = \sqrt{\pi l}, \qquad l > 0.$$

On remarque que la fonction $\theta_k(t,x)$ admet son maximum en 0 qui vaut $\theta_k(t,0) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi k t}}$ et qui tend vers 0 lorsque t augmente. Il y a étalement de la solution (cf figure ci-contre).



La fonction $\theta_k(t,x)$ a des propriétés très similaires à la fonction $g_h = (2h)^{-1}\chi_{[-h,h]}$, où $h > 0$. En effet comme g_h la fonction $\theta_k(t,x)$ est d'intégrale 1 et concentrée autour de 0. Pour une fonction continue bornée $f(x)$, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} f(x)\theta_k(t,x)dx$ est une moyenne pondérée autour de 0 de la fonction $f(x)$ et donc $\lim_{t\longrightarrow 0^+}\int_{\mathbb{R}} f(x)\theta_k(t,x)dx = f(0)$. On a donc $\theta_k(t,\cdot) \longrightarrow \delta_0 \quad (t \longrightarrow 0^+)$ (au sens des distributions). La condition initiale est donc vérifiée.
Vérifions maintenant que $\theta_k(t,x)$ est solution de l'équation de la chaleur. On a

$$\begin{aligned}\frac{\partial\theta_k}{\partial t}(t,x) &= -\frac{t^{-3/2}}{4\sqrt{\pi k}}e^{-x^2/(4kt)} + \frac{x^2 t^{-5/2}}{8k\sqrt{\pi k}}e^{-x^2/(4kt)} \\ &= \theta_k(t,x)\left(-\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{4kt^2}\right),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{\partial\theta_k}{\partial x}(t,x) &= -\frac{x}{2kt}\theta_k(t,x), \\ \frac{\partial^2\theta_k}{\partial x^2}(t,x) &= \left(\frac{x^2}{4k^2t^2} - \frac{1}{2kt}\right)\theta_k(t,x) \\ &= \frac{1}{k}\frac{\partial\theta_k}{\partial t}(t,x).\end{aligned}$$

L'étalement, ou la dissipation, est un comportement typique des équations paraboliques.

Remarque 3.2.1 *On voit que l'effet de l'apport d'une masse de Dirac en $x = 0$ et $t = 0$ fait que la solution vérifie*

$$\theta_k(t,x) > 0, \qquad pour \quad t > 0, \quad et \quad x \in \mathbb{R}$$

autrement dit, il y a un effet instantané à une distance arbitraire de la source de chaleur. Heureusement cet effet décroît exponentiellement.

Proposition 3.2.2 *Pour u_0 continue et bornée, la solution bornée de*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, & t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{3.3}$$

est $u(t,x) = u_0(x) * \theta_k(t,x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi k t}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\dfrac{(x-y)^2}{4kt}\right) u_0(y)dy.$

Preuve 2 *On a*

$$\lim_{t \longrightarrow 0^+} u(t,x) = u_0(x) * \lim_{t \longrightarrow 0^+} \theta_k(t,x) = u_0(x) * \delta_0(x) = u_0(x),$$

et

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = u_0 * \frac{\partial \theta_k}{\partial t}(t,x),$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = u_0 * \frac{\partial^2 \theta_k}{\partial x^2}(t,x) = u_0(x) * \frac{1}{k}\frac{\partial \theta_k}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t}(t,x).$$

Des résultats similaires existent en dimensions supérieures. Pour les domaines bornés, on peut adapter la méthode mais c'est plus délicat. C'est pourquoi nous allons voir la méthode de séparation des variables.

3.2.2 Résolution de l'équation de la chaleur par séparation des variables

On cherche à résoudre l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) - k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, & t \geq 0, \quad x \in [0,L] \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x). \end{cases} \tag{3.4}$$

avec les relations de compatibilité entre la condition initiale et les conditions aux limites

$$u_0(0) = u_0(L) = 0.$$

Première étape : La méthode de séparation des variables consiste à poser

$$u(t,x) = \psi(t)\varphi(x)$$

dans l'équation et de "séparer les variables". L'équation devient

$$\psi'(t)\varphi(x) = k\psi(t)\varphi''(x).$$

On divise alors formellement par $u(t,x) = \psi(t)\varphi(x)$

$$\frac{1}{k}\frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}$$

Comme le membre de gauche ne dépend que de t et le membre de droite que de x on en déduit qu'ils sont constants, c'est à dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ avec

$$\psi'(t) = \lambda k \psi(t),$$
$$\varphi''(x) = \lambda \varphi(x).$$

On a bien obtenu deux équations à variables séparées.
Deuxième étape : On cherche les solutions non nulles de l'équation en $\varphi(x)$ avec les conditions aux limites, soit

$$\begin{cases} \varphi''(x) = \lambda\varphi(x), \\ \\ \varphi(0) = \varphi(L) = 0. \end{cases}$$

Les solutions dépendent de la constante λ

- Si $\lambda > 0$ alors les solutions de l'équation différentielle sont

$$\varphi(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$$

Si on cherche maintenant à tenir compte des conditions aux limites, il vient

$$\begin{aligned} \varphi(0) = 0 &\Longrightarrow A + B = 0 \\ \varphi(L) = 0 &\Longrightarrow A\left(e^{\sqrt{\lambda}L} - e^{-\sqrt{\lambda}L}\right) = 0 \\ &\Longrightarrow 2A\sinh(\sqrt{\lambda}L) = 0 \\ &\Longrightarrow A = B = 0. \end{aligned}$$

Il n'y a donc pas de solutions non nulles dans ce cas.

- Si $\lambda = 0$

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= Ax + B \\ \varphi(0) = 0 &\Longrightarrow B = 0, \\ \varphi(L) = 0 &\Longrightarrow AL = 0 \Longrightarrow A = 0. \end{aligned}$$

Il n'y a donc pas de solutions non nulles dans ce cas non plus.

- Si $\lambda < 0$ alors

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= A\sin(\sqrt{-\lambda}x) + B\cos(\sqrt{-\lambda}x), \\ \varphi(0) = 0 &\Longrightarrow B = 0 \\ \varphi(L) = 0 &\Longrightarrow A\sin(\sqrt{-\lambda}L) = 0, \\ \Longrightarrow \text{ou bien} \quad A = 0 \quad &\text{ou bien} \quad \sqrt{-\lambda}L = n\pi, \quad n > 0 \quad \text{entier.} \end{aligned}$$

Il existe donc des solutions non nulles dans ce cas qui sont

$$\varphi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad n > 0,$$

associées aux valeurs de λ suivantes

$$\lambda_n = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}.$$

Au total, on a obtenu une suite infinie de solutions associées chacune à une valeur de λ. On appelle les solutions $\varphi_n(x)$ les fonctions propres du problème et les λ_n les valeurs propres associées. La fonction propre, comme les vecteurs propre en algèbre linéaire, sont définis à un scalaire multiplicatif prés.
Troisième étape : On remarque que le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^L f(x)g(x)dx$$

orthogonalise la suite des $\varphi_n(x)$, dans le sens où

$$\langle \varphi_n(x), \varphi_m(x) \rangle = 0 \qquad n \neq m.$$

Par le théorème de Fourier, cette famille est complète dans $L^2(0,L)$: on peut y développer la solution par projection orthogonale.
Quatrième étape : On résout l'équation en $\psi(t)$ pour les valeurs de λ_n trouvées précédemment et sans se préoccuper de la condition initiale. On a à résoudre l'équation

$$\psi_n'(t) = \lambda_n k \psi_n(t)$$

qui a pour solutions

$$\psi_n(t) = c_n e^{k\lambda_n t} = c_n e^{-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t},$$

étant donné qu'il n'y a pas de condition initiale à cette équation différentielle d'ordre 1 on trouve un espace vectoriel de dimension 1 de solutions. c_n est une constante arbitraire pour le moment.
A ce stade, les fonctions

$$\psi_n(t)\varphi_n(x),$$

sont solutions de l'E.D.P. et des conditions aux limites mais pas de la condition initiale.
Cinquième étape : L'équation étant linéaire, la somme de plusieurs solutions à l'équation est toujours solution de l'équation. On écrit donc la solution $u(t,x)$ comme somme de toutes les solutions élémentaires

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(t)\varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e^{-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

Il faut maintenant déterminer les coefficients c_n pour que la solution $u(t,x)$ vérifie la condition initiale. Cette condition initiale s'écrit

$$u(0,x) = u_0(x)$$

ce qui donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(0)\varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \varphi_n(x) = u_0.$$

Ici, les c_n peuvent s'interpréter directement comme étant les coordonnées de la décomposition de u_0 dans la base des $\varphi_n(x)$. Comme les $\varphi_n(x)$ sont orthogonales pour le produit scalaire $\langle .,. \rangle$ défini précédemment, on a

$$c_n = \frac{\langle u_0(x), \varphi_n(x) \rangle}{\langle \varphi_n(x), \varphi_n(x) \rangle} = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

On obtient donc la solution sous la forme d'une série. Ici il s'agit d'une série de Fourier où seules les composantes en $\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ sont présentes, puisqu'on a imposé : $u(0) = u(L) = 0$.

3.3 Équations des ondes

Les équations hyperboliques sont de type équation de propagation d'ondes, on les rencontre la plupart du temps sous la forme d'une équation évolutive du type

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}(t,x) - div\,(q(x)\nabla_x\Phi(t,x)) = h(t,x), \qquad \text{où} \quad q(x) > 0.$$

Le terme $div\,(q(x)\nabla_x\Phi(t,x))$ est un terme elliptique par rapport à la variable x. Comme dans le cas des équations paraboliques, nous allons regarder dans un premier temps l'équation unidimensionnelle, avec $q(x) = c^2$ qui est ici

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = h(t,x), \qquad t \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3.3.1 Résolution de l'équation des cordes vibrantes par séparation des variables

On cherche à résoudre l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x) = 0, \qquad t \geq 0, \quad x \in [0,L] \\ u(t,0) = u(t,L) = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \\ \dfrac{\partial u(0,x)}{\partial t} = v_0(x). \end{cases} \tag{3.5}$$

avec les relations de compatibilité entre les conditions initiales et les conditions aux limites

$$u_0(0) = u_0(L) = v_0(0) = v_0(L) = 0.$$

Première étape :On pose encore

$$u(t,x) = \psi(t)\varphi(x)$$

et on porte dans l'E.D.P. L'équation devient

$$\psi''(t)\varphi(x) = c^2\psi(t)\varphi''(x).$$

On divise alors formellement par $u(t,x) = \psi(t)\varphi(x)$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}.$$

Comme le membre de gauche ne dépend que de t et le membre de droite que de x on en déduit qu'ils sont constant, c'est à dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ avec

$$\begin{aligned} \psi''(t) &= \lambda c^2\psi(t), \\ \varphi''(x) &= \lambda\varphi(x). \end{aligned}$$

Et on a obtenu deux équations à variables séparées.
Deuxième étape : On cherche les solutions non nulles de l'équation en $\varphi(x)$ avec les conditions aux limites, soit

$$\begin{cases} \varphi''(x) = \lambda\varphi(x), \\ \varphi(0) = \varphi(L) = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

C'est exactement la même équation et les mêmes conditions aux limites que pour l'équation de la chaleur unidimensionnelle. On a donc les mêmes solutions

$$\varphi_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \qquad n > 0,$$

associées aux valeurs de λ suivantes

$$\lambda_n = \frac{-n^2\pi^2}{L^2}.$$

Troisième étape : Le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^L f(x)g(x)dx$$

orthogonalise toujours la suite des $\varphi_n(x)$.
Quatrième étape : On résout l'équation en $\psi(t)$ pour les valeurs de λ_n trouvées précédemment et sans se préoccuper de la condition initiale. On a à résoudre l'équation

$$\psi_n''(t) = \lambda_n c^2 \psi_n(t),$$

qui a pour solutions, étant donné que $\lambda_n < 0$

$$\psi_n(t) = c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}ct\right) + d_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}ct\right),$$

étant donné qu'il n'y a pas de condition initiale à cette équation différentielle d'ordre 2 on trouve un espace vectoriel de dimension 2 de solutions. c_n et d_n sont des constantes arbitraires.
A ce stade, les fonctions

$$\left(c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}ct\right) + d_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}ct\right)\right)\varphi_n(x),$$

sont solutions de l'E.D.P. et des conditions aux limites mais pas de la condition initiale.
Cinquième étape : On écrit à nouveau la solution $u(t,x)$ comme somme de toutes les solutions élémentaires

$$u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \psi_n(t)\varphi_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}ct\right) + d_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}ct\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Il faut maintenant déterminer les coefficients c_n et d_n grâce aux conditions initiales, ce qui donne pour $u(0,x) = u_0(x)$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} d_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = u_0.$$

Les d_n peuvent donc s'interpréter comme étant les coordonnées de la décomposition de u_0 dans la base des $\varphi_n(x)$, soit

$$d_n = \frac{\langle u_0(x), \varphi_n(x)\rangle}{\langle \varphi_n(x), \varphi_n(x)\rangle} = \frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx.$$

Quant à la condition $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = v_0(x)$, elle donne

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \frac{n\pi}{L} c \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = v_0.$$

On obtient donc

$$c_n = \frac{L}{n\pi c}\frac{\langle v_0(x), \varphi_n(x)\rangle}{\langle \varphi_n(x), \varphi_n(x)\rangle} = \frac{2}{n\pi c}\int_0^L v_0(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx.$$

3.3.2 Séparation des variables dans le cas $2D$

Si Ω est un domaine représentant la forme d'un objet dont on veut étudier les vibrations (mur en béton, pièce mécanique, châssis de voiture, pont ...) On étudie l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t,x) - c^2 \triangle u(t,x) = 0, \qquad \text{pour} \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0$$
$$\frac{\partial u}{\partial n}(t,x) = 0 \qquad \text{sur} \quad \partial\Omega.$$

(En réalité, la plupart de ces objets sont élastiques et réagissent à deux équations des ondes : ondes de cisaillement et ondes de compression). On pose de la même manière

$$u(t,x) = \psi(t)\varphi(x)$$

On se retrouve avec

$$\psi''(t) = \lambda c^2 \psi(t),$$
$$\triangle\varphi(x) = \lambda\varphi(x),$$

Pour $\lambda < 0$, le problème temporel est inchangé. Pour Neumann, $\lambda = 0$ et φ constante donnent $\psi(t) = A + Bt$. Le problème spatial est

$$\begin{cases} \triangle\varphi(x) = \lambda\varphi(x), \\ \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}(x) = 0 \qquad \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.7}$$

Là aussi on trouve une suite infinie $\lambda_n, \quad \varphi_n$ de solutions. Les valeurs $\frac{c\sqrt{-\lambda_n}}{2\pi}$ correspondent aux fréquences propres de la structure étudiée.