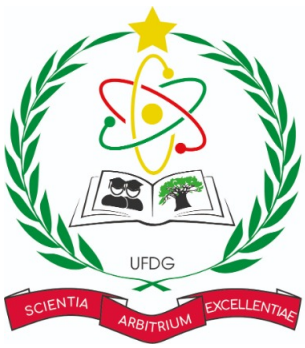
Introduction à la théorie du contrôle optimal

Dr. SIMPORE

Février 2024



UNIVERSITE DE
FADA N'GOURMA

Table des matières

Notations Générales **3**

I contrôle optimal en dimension finie 5

1 Introduction au contrôle optimal **7**
1.1 Théorie du contrôle optimal et des systèmes de contrôle 8
1.1.1 Objet du contrôle 8
1.1.2 Condition initiale du système 9
1.1.3 Le but du contrôle 9
1.1.4 Classe des contrôles admissibles 9
1.1.5 Définitions importantes 10
1.2 contrôlabilité 12
1.2.1 contrôlabilité des systémes linéaires 12
1.2.2 contrôlabilité des systèmes non-linéaires 17
1.3 problème de contrôle optimal : Principe du maximum de Pontryagin 18
1.3.1 Cas sans contrainte sur le contrôle : principe du maximum faible . . . 18
1.3.2 Principe du maximum de Pontryagin, version générale 19
1.3.3 Principe du maximum de Pontryagin dans le cas linéaire 23
1.4 Analyse du problème LQ 23
1.4.1 Existence de trajectoires optimales 24
1.4.2 Condition nécessaire et suffisante d'optimalité 24
1.4.3 équation de Riccati et contrôle de boucle fermée 25

2 Méthodes numériques en contrôle optimal **27**
2.1 Méthodes indirectes 27
2.1.1 la méthode de Newton 27
2.1.2 Méthode de tir simple 28
2.2 Méthodes directes 29
2.3 Analyse des méthodes en vu d'un meilleur choix 30
2.3.1 Analyse des méthodes directes 30
2.3.2 Analyse des méthodes indirectes 31
2.4 Méthode hybride 32

II contrôle optimal en dimension infinie 35

3 Rappels sur l'analyse fonctionnelle 37
3.1 Espaces normés et espaces de Banach. . . . 37
3.2 Espaces de Hilbert . . . 37
3.3 Topologie Faible . . . 39
3.4 Distributions . . . 40
3.4.1 L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ . . . 40
3.4.2 L'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ des distributions sur Ω . . . 41
3.4.3 Dérivation des distributions . . . 41
3.4.4 Convergence des distributions . . . 42
3.5 Espaces de Sobolev . . . 43
3.5.1 L'espace $H_0^1(\Omega)$ . . . 44
3.5.2 Trace et formule de Green . . . 45
3.5.3 Espace trace $H^{1/2}(\Gamma)$ et $H^{-1/2}(\Gamma)$ . . . 46

4 Problème de contrôle Optimal en dimension infinie 47
4.1 Minimisation Fonctionnelle . . . 47
4.1.1 Formulation et position du problème de contrôle optimal . . . 47
4.2 Minimisation fonctionnelle (Problème 1) . . . 49
4.2.1 Fonctions convexes/fortement convexes . . . 49
4.2.2 Structure de l'ensemble des contrôles optimaux . . . 52
4.2.3 Caractérisation du contrôle optimal . . . 53
4.3 Application . . . 53
4.3.1 Problème de contrôle . . . 53
4.3.2 Système d'optimalité (Stampacchia et Contrôle optimal) . . . 54
4.4 Calcul du contrôle : la méthode de Pénalisation . . . 55
4.5 Contrôle d'un système distribué gouverné par un opérateur elliptique . . . 56
4.5.1 Observation distribuée . . . 56
4.5.2 Fonction coût Le problème de contrôle . . . 56
4.5.3 Existence du contrôle optimal . . . 56
4.5.4 Caractérisation du contrôle . . . 57
4.5.5 Système d'optimalité . . . 57

5 Application 59
5.1 Contrôle optimal d'un problème elliptique . . . 59
5.1.1 Présentation d'un problème de contrôle optimal . . . 59
5.1.2 Fonction coût de problème de contrôle . . . 60
5.1.3 Existence-unicité et régularité d'une solution $y(f,g,v)$ . . . 60
5.1.4 Existence-unicité du contrôle optimal . . . 60
5.1.5 Caractérisation du contrôle optimal. . . . 63
5.1.6 Système d'optimalité . . . 65
5.2 Méthode numérique . . . 66
5.2.1 Calcul approché de la solution du problème dans le cas sans contrainte par la méthode des différences finies. . . . 66
5.2.2 Résultats de simulations numériques . . . 72

Bibliographie 73

Notations générales

1 . E.D.P : Équations aux Dérivées Partielles.

2. $x = (x_1, ..., x_n)$:élément de $\mathbb{R}^n$.

3. Ω : Un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

4. $\partial\Omega$ Le bord de Ω

5. $C^0(\Omega)$: L'ensemble de fonctions continues sur Ω.

6. $\mathcal{D}(\Omega)$: L'ensemble de fonctions indéfiniment dérivable sur Ω et à support compact.

7. $\mathcal{D}^\star(\Omega)$: Dual topologique de $\mathcal{D}(\Omega)$.

8. pp : presque partout.

9. $L^\infty(\Omega)$: L'ensemble de fonctions essentiellement bornées sur Ω

10. $L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}, f \quad \text{mesurable sur } \Omega \text{ et tel que} \quad \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty \right\}$

$$11. W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \exists g_i \in L^p(\Omega),\ \int_\Omega u\,\partial_i\phi = -\int_\Omega g_i\phi,\ \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega),\ i = 1, \dots, n \right\}$$

12. $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ est l'ensemble des fonctions k-fois continument différentiables et leurs dérivées partielles sont continues Holdérienne d'exposant α.

$$13. \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n} \right) : \text{Gradiant de} \quad u; \quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + , ..., + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = \operatorname{div}(\nabla u) : \text{Laplacien de} \quad u$$

$$14. D_i u = \partial_i u = u_{x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}. \quad \text{La dérivée partielle de} \quad u \quad \text{par rapport} \quad x_i.$$

15. $D_{ij}u = \partial_{ij}u = u_{x_{ij}} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i x_j}$. La dérivée partielle de u par rapport à $x_i x_j$.

Première partie

contrôle optimal en dimension finie

1

Introduction au contrôle optimal

Introduction

Les processus physiques consomment tous une certaine quantité d'énergie lors de leur fonctionnement. Il apparait souhaitable, lorsque cela est possible, de chercher à minimiser cette dépense tout en restant proche autant que possible de l'objectif vis.
Ainsi, lorsque l'on s'intèresse à la fabrication d'un produit, il est naturel de rechercher une procédure conduisant à un compromis entre, d'une part, une qualité et une quantité de produit fini maximale, et d'autre part, une dépense minimale en énergie et en matière premiére, sans oublier d'atténuer au maximum les nuisances éventuelles de tous ordres occasionnées par la fabrication du produit.
Si on possède un modèle mathématique décrivant le processus physique et si on a fait le choix d'un objectif à atteindre par la donnée d'une fonctionnelle à minimiser, il est alors possible de poser le problème mathématique et de chercher les solutions optimales éventuelles.
Dans ce chapitre le problème général étudié est le suivant. Soient **n** et **m** deux entiers non nuls, **I** un intervalle de $\mathbb{R}$, et $\mathbf{f} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application choisie suffisamment régulière pour que tout ce qui suit ait un sens. Soit $\mathbb{U}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^m$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Le système de contrôle auquel on s'intéresse est :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in I \\ \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1.1}$$

où l'ensemble des contrôles u considérés est l'ensemble des applications mesurables et bornées sur I, à valeurs dans le sous-ensemble $\mathbb{U} \in \mathbb{R}^m$. Les théorèmes classiques d'existence de solutions d'équations différentielles nous assurent que, pour tout contrôle u, le système (1.1) admet une unique solution $x_u(\cdot) : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, absolument continue.
La solution x_u du système ci-dessus dépend de u. Donc si on change la fonction u, on obtient une autre trajectoire $t \longmapsto x(t)$ dans $\mathbb{R}^n$.

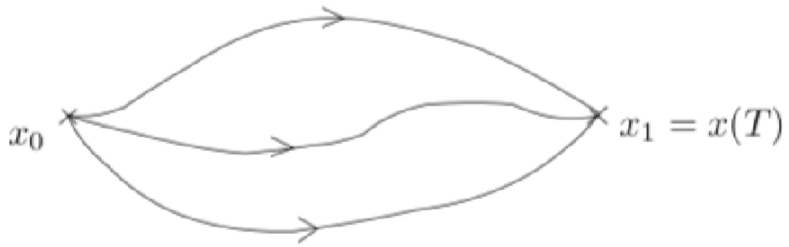


FIGURE 1.1 –

Ainsi, deux questions se posent naturellement :

- étant donné un point $x_1 \in \mathbb{R}^n$, existe-t-il un contrôle u tel que la trajectoire associée à ce contrôle joigne x_0 à x_1 en un temps fini ?
  C'est le problème de contrôlabilité exacte.
- Si la condition précédente est remplie, existe-t-il un contrôle joignant x_0 à x_1, et qui de plus minimise une certaine fonctionnelle $u \longmapsto C(u)$?
  C'est le problème de contrôle optimal.

La fonctionnelle $u \longmapsto C(u)$ est un critère d'optimisation, on l'appelle le coût. Par exemple ce coût peut etre égal au temps de parcours, dans ce cas c'est le problème du temps minimal.
Ce chapitre est consacré d'abord à la présentations des concepts de bases d'un problème de contrôle, ensuite, à la résolution du problème de contrôlabilité et enfin celle du contrôle optimal par le Principe du Maximum de Pontryagin.

1.1 Théorie du contrôle optimal et des systèmes de contrôle

Le problème général de contrôle optimal est constitué des données suivantes :

1.1.1 Objet du contrôle

Le système peut comporter beaucoup de variables ou paramètres. On suppose que n variables sont nécessaires pour décrire son comportement. L'identification de ces variables et la description du système dépendant de celle-ci est une tache très importante : c'est l'étape de modélisation mathématique.
Les variables, nommées variables d'état seront notées x_i, $i = 1, ..., n$. Le systéme évolue dans le temps, donc les x_i sont des fonctions de t : $x_i(t)$. On ne le notera pas explicitement, mais cela sera sous entendu. Les n variables d'états vont etres gouvernées par n équations différentielles du premier ordre sur un intervalle de temps $I = [t_0, T]$: ce sont des équations de la forme générale :

$$\dot{x}^i = f^i(t, x_1, ..., x_n, u_1, ..., u_m), \quad i = 1, ..., n. \tag{1.2}$$

Les variables de contrôles seront notées $u_j(t), j = 1, ..., m$. Elles sont soumises à l'hypothèse d'intégration par rapport à t. Cela simplifie beaucoup les traitements si les u_j sont connues : cependant cette hypothèse est bien souvent trop restrictive car ces fonctions peuvent etre continues par morceaux ou de type Bang-Bang

1.1.2 Condition initiale du système

La condition initiale du système, $x_0 = x(t_0)$, est un vecteur donné dans un plan de phase. En réalité, Les composantes de $x(t)$ et de x_0 peuvent représenter physiquement : la position, la vitesse, la température et d'autres paramètres mesurables.

1.1.3 Le but du contrôle

Dans un problème de contrôle, le but de la commande consiste à ramener l'objet de la position initiale $x_0 = x(t_0), (x_0 \in M_0)$ à une autre position $x_1 = x(T), (x_1 \in M_1)$ où M_0 est l'ensemble de départ, et M_1 l'ensemble d'arrivé.

1.1.4 Classe des contrôles admissibles

$\mathbb{U}$ est l'ensemble des contrôles admissibles qui peut etre non borné, borné ou du type Bang-Bang.

contrôle bornée

Dans beaucoup de problèmes de contrôle, on peut minorer et majorer les $u_j(t)$ par des constantes. Dans la suite, nous considérons ce type de problème avec $a_j \leq u_j \leq b_j$. Notons que l'on peut remplacer u_j par v_j en posant $u_j = \frac{1}{2}(a_j + b_j) + \frac{1}{2}(b_j - a_j)v_j$ et ainsi v_j est aussi intégrable et l'on a $-1 \leq v_j \leq 1$. Donc lorsque $\mathbb{U}$ est borné, il est toujours pratique de se ramener à des commandes entre -1 et 1.

contrôle Bang-Bang

On suppose que $\mathbb{U}$ est un polyèdre(cube) $[-1,1]^m$ dans $\mathbb{R}^m$. Un contrôle $u \in \mathbb{U}$ est appelé contrôle Bang-Bang si pour presque tout instant t et chaque indice $j = 1, ..., m$, on a $|u_j(t)| = 1$. En d'autres termes, une commande Bang-Bang est une commande prenant ses valeurs aux sommets du cube.

Critère de qualité

L'objectif, lors de la formulation d'un problème de contrôle, est de fournir la motivation physique pour la sélection d'une mesure de qualité pour le système. Le problème revient à définir une expression mathématique qui, lorsqu'elle est optimisée, indique que le système atteint un état désirable. Donc, choisir une mesure de qualité, est une traduction en termes mathématique des exigences physiques du système.
Le critère de qualité, appelé aussi coût ou fonction objectif, est généralement décrit par la formule

$$J(x,u) = g(T,x_1) + \int_{t_0}^{T} f_0(t,x,u)dt. \tag{1.3}$$

Cette fonctionnelle comporte deux parties : $g(T,x_1)$ est le coût terminal, c'est une sorte de pénalité liée à la fin de l'évolution du système au temps final T, il a son importance lorsque T est libre, sinon il est constant. Le second terme intervenant dans la fonction objectif $\int_{t_0}^{T} f_0(t,x,u)dt$ dépend de l'état du système tout au long de la trajectoire de la solution, définie par les variables d'état. Cette trajectoire dépend aussi du temps t mais surtout des variables de contrôle u. C'est une fonction d'efficacité de chaque commande sur l'intervalle

I.
On peut classer les fonctions objectifs en deux critères physiques de performance :

Temps optimal

On parle d'un problème en temps optimal lorsque $f_0(t,x,u)dt = 1$, $g(T,x_1) = 0$ et le temps final T est libre dans l'expression de $\min_u \int_{t_0}^{T} 1 dt$

coût optimal

On parle d'un problème en coût optimal lorsque le temps final T est fixé dans l'expression

$$\min_u \Big(g(T,x_1) + \int_{t_0}^{T} f_0(t,x,u)dt \Big)$$

évidemment, il existe des problèmes qui combinent les deux critères physiques de qualité, et on parlera dans ce cas d'un problème de contrôle en temps et en coût optimal.
Si dans l'expression de J, f_0 est proportionnelle à u^2, on parle alors d'un coût quadratique.
Si u est un contrôle scalaire et f_0 est proportionnelle à u, on parle de problème de contrôle à coût d'approvisionnement. Lorsque les équations d'état $\dot{x} = f(x,u)$ ne dépendent pas explicitement de la variable t, on parle dans ce cas de problème autonome. Si t est présent dans les équations d'état on parle de problème non-autonome.

problème de Mayer-Lagrange

Le problème de Mayer-Lagrange est donné sous la forme d'un système

$$\dot{x}(t) = f(t,x(t),u(t)), x(0) = x_0, x(T) = x_1, u \in \mathbb{U}, \quad t \in [t_0, T], \tag{1.4}$$

l'objectif étant de minimiser le coût

$$J(T,u) = g(T,x_1) + \int_{t_0}^{T} f_0(t,x,u)dt \tag{1.5}$$

Lorsque $g = 0$ dans l'expression de la fonctionnelle J, on parlera d'un problème de Lagrange et lorsque $f_0 = 0$, on parlera d'un problème de Mayer.

1.1.5 Définitions importantes

Soient E un espace vectoriel normé, U un ouvert de E, f une fonction définie sur U à valeurs dans un espace vectoriel normé F.

Définition 1.1.1 *On dit que f admet une dérivée en x dans la direction h, si la limite*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}$$

, $t > 0$, existe, qu'on notera $\frac{\partial f}{\partial x}.h$

Définition 1.1.2 *On dit que la fonction f admet une dérivée directionnelle en x, si pour tout $h \in E$, $\frac{\partial f}{\partial x}.h$ existe. Si f admet une dérivée directionnelle en x, alors on appelle la fonction, positivement homogène $f'(x) : E \longrightarrow F$ la dérivée directionnelle de f en x.*

Définition 1.1.3 (Dérivée au sens de Gâteaux) *On dit que f est dérivable en x au sens de Gâteaux, si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *$\frac{\partial f}{\partial x}.h$ existe pour tout $h \in E$, c'est-à-dire que la fonction f admet une dérivée directionnelle en x.*
2. *la dérivée directionnelle de f en x, $f'(x)$, est une application linéaire continue. c'est-à-dire $f'(x) \in \mathcal{L}(E, F)$*

Définition 1.1.4 (Sous-variété) *Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une partie M de $\mathbb{R}^d$ est une sous-variété si elle une sous-variété en chacun de ses points. On dit que M est un sous-variété de dimension m de $\mathbb{R}^d$ en l'un de ses points x_0 s'il existe un voisinage W de x_0 et un difféomorphisme de classe c^1 $f : W \to U$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^d$ qui envoie x_0 en 0, tel que $M \cap W = f^{-1}(\{0\} \times \mathbb{R}^m)$.*
Les sous variétés sont les parties de espaces $\mathbb{R}^m$ sur lesquelles on peut appliquer les méthodes du calcul différentiel.

Définition 1.1.5 *Soit A une matrice :*

- *La matrice A est symétrique si : $A^t = A$*
- *La matrice symétrique réelle A est définie positive si toutes ses valeurs propres sont strictement positives. On note : $A > 0$*
- *Une matrice B est une définie négative si son opposé $-B$ est une définie positive. On note : $B < 0$*

Définition 1.1.6 (Algèbre de Lie) *Une algèbre de Lie est un espace vectoriel qui est muni d'un crochet$([.,.])$ de Lie, c'est-à-dire d'une loi de composition interne bilinéaire, antisymétrique et qui vérifie la relation de Jacobi.*

Définition 1.1.7 *Soit un espace vectoriel V muni d'une application bilinéaire $[.,.] : V \times V \to V$ pour en faire une algèbre de Lie, on dit alors que $[.,.]$ est un **crochet de Lie**. La relation de Jacobi s'écrit de la facon suivante :*

$$\forall x, y, z \in V, \quad [x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0.$$

Définition 1.1.8 *soit $n > 0$ et GL_n le groupe des matrices **inversibles d'ordre n**, muni de la multiplication matricielle*

*(i) L'ensemble des matrices **symplectiques** est définie par : $Sp(n, \mathbb{R}) = \{M \in GL_{2n}(\mathbb{R}) \mid M^t J M = J\}$;*
*(ii) **L'algèbre de Lie** du groupe de Lie des matrices symplectiques est définie par : $sp(n, \mathbb{R}) = \{M \in M_{2n}(\mathbb{R}) \mid M^t J + JM = 0\}$;*
*(iii) Un matrice **hamiltonienne** A est une matrice matrice réelle $2n \times 2n$ satisfaisant la condition que le produit JA soit symétrique.*

J est la matrice par blocs antisymétrique définie par : $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$ et I_n étant la matrice identité $n \times n$.

Remarque 1.1.1 .

- *Toute matrice symplectique est inversible et son inverse est donnée :*

$$M^{-1} = -JM^tJ;$$

- *Si A est une matrice symétrique, alors ses valeurs propres sont réels.*
- *Si $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ est symétrique, elle est diagonalisable sous la forme $A = PDP^{-1}$ avec, $P, D \in \mathbb{R}^{n\times n}$, (où D est matrice diagonale de valeurs propres (réels))*

Remarque 1.1.2 *Supposons que M soit une matrice inversible de $sp(n,\mathbb{R})$ avec des valeurs propres simples en trois groupes :*
- *les valeurs propres réelles : $(\lambda_k, -\lambda_k)$,*
- *les valeurs propres imaginaires : $i\mu_k, -i\mu_k$,*
- *les valeurs propres complexes : $v_k = \lambda_k + i\mu_k$, avec $\lambda_k \neq 0, -v_k, \bar{v}_k, -\bar{v}_k$. Dans chacun de ces cas, il existe un changement symplectique de coordonnées tel que, dans le nouveau système, la matrice M est constituée de blocs soit de la forme :*

- *cas réel :* $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$
- *cas imaginaire :* $\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$ *ou* $\begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$
- *cas complexe :* $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & -A^t \end{pmatrix}$ *avec* $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$,

avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^k$. Pour une discussion plus détaillée des formes normales symplectiques et de leur utilisation en théorie du contrôle, nous renvoyons le lecteur à ([4] (section 1)).

1.2 contrôlabilité

Pour déterminer une trajectoire optimale joignant un ensemble initial à une cible, il faut d'abord savoir si cette cible est atteignable : c'est le problème de contrôlabilité. La notion de contrôlabilité a été introduite en 1960 par Kalman pour des systémes linéaires. C'est l'un des concepts centraux de la théorie du contrôle. C'est la possibilité d'influencer l'état du systéme (sortie) en manipulant les entrées (contrôles).

1.2.1 contrôlabilité des systémes linéaires

Soient A , B et r trois application L^∞ é valeurs respectivement dans $M_n(\mathbb{R})$, $M_{n,m}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}^n$, et $T > 0$ un horizon temporel fixé.
Où $M_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrice réels d'ordre n et $M_{n,m}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrice réels de n lignes et de m colonnes, n et m sont des entiers naturels non nuls
l'ensemble des contrôles u considérés est l'ensemble des applications mesurables et bornées sur I, à valeurs dans le sous-ensemble $\mathbb{U} \in \mathbb{R}^m$.
Le systéme de contrôle linéaire auquel on s'intéresse est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \quad t \in [0,T] \\ \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{1.6}$$

Définition 1.2.1 *L'ensemble des points accessibles à partir de x_0 en un temps $T > 0$ pour le système* (1.6) *est défini par*

$$Acc(x_0, T) = \{x_u(T) \mid u \in L^\infty([0,T], \mathbb{U})\}, \tag{1.7}$$

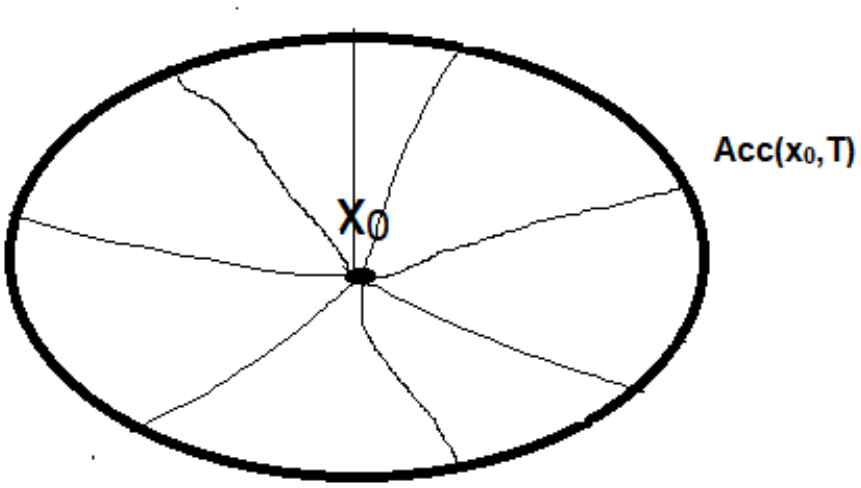


FIGURE 1.2 – Ensemble accessible

où $x_u\cdot$ est la solution du systéme associée au contrôle u.
Autrement dit, $Acc(x_0, T)$ est l'ensemble des extrémités des solutions de (1.6) *au temps T, lorsqu'on fait varier le contrôle u (voir la figure ci-dessous).*

Définition 1.2.2 *Le système* (1.6) *est dit contrôlable (en temps quelconque) depuis x_0 si*

$$\bigcup_{T\geq 0} Acc(x_0, T) = \mathbb{R}^n. \tag{1.8}$$

Il est dit contrôlable en temps T si

$$Acc(x_0, T) = \mathbb{R}^n. \tag{1.9}$$

Autrement dit, pour tout x_0, $x_1 \in \mathbb{R}^n$, il existe un contrôle u tel que la trajectoire associée relie x_0 à x_1, en temps T

Définition 1.2.3 *Soit $R(\cdot) : [0, T] \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ la résolvante du système linéaire homogéne $\dot{x} = A(t)x(t)$. Alors elle est définie par*

$$\begin{cases} \dot{R}(t) = A(t)R(t), \quad t \in [0, T] \\ \\ R(0) = I_n. \end{cases} \tag{1.10}$$

Pour tout contrôle u le systéme (1.6) admet une unique solution $x(\cdot) : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue donnée par

$$x(t) = R(t)x_0 + R(t)\int_0^t R(s)^{-1}(B(s)u(s) + r(s))ds, \quad t \in [0, T]. \tag{1.11}$$

Si $r = 0$ et $x_0 = 0$, la résolvante du système s'écrit

$$x(t) = R(t)\int_0^t R(s)^{-1}B(s)u(s)ds. \tag{1.12}$$

Elle est linéaire en u.
Le théoréme suivant donne une condition générale pour la contrôlabilité des systémes linéaires :

Théorème 1.2.1 *Pour $\mathbb{U} = \mathbb{R}^m$, le système $\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \quad t \in [0,T]$ est contrôlable en temps T si, et seulement si la matrice de contrôlabilité*

$$C_T = \int_0^T R(s)^{-1}B(s)B(s)^\top (R(s)^{-1})^\top ds \in M_n(\mathbb{R}), \tag{1.13}$$

dite matrice de contrôlabilité, est inversible.

Remarque 1.2.1 *La condition du théoréme* (1.2.1) *ne dépend pas de x_0, mais peut dépendre de T. Pour A et B constantes, la condition de Kalman assure la contrôlabilité en tout temps $T > 0$ depuis tout point.*

contrôlabilité du systéme linéaire autonome

Dans le cas où A et B ne dépendent plus du temps, (1.6) est un système dit autonome et s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t) \quad t \in [0,T] \\ \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{1.14}$$

Dans ce cas la matrice $R(t) = e^{At}$, et la solution du système associée é u s'écrit :

$$x(t) = e^{tA}\left(x_0 + \int_0^t e^{-As}(Bu(s) + r(s))ds\right), \quad t \in [0,T]. \tag{1.15}$$

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans le cas sans contrainte sur le contrôle.

Théorème 1.2.2 *On suppose que $\mathbb{U} = \mathbb{R}^m$. Le système linéaire autonome* (1.14) *est contrélable pour tout $T > 0$ et pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si la matrice*

$$C = [B, AB, ..., A^{n-1}B] \in M_{n,nm}(\mathbb{R}^\kappa)$$

est de rang n.
*La matrice C est appelée **matrice de Kalman** et la condition $rg(C) = n$ est appelée **condition de Kalman**.*

Lemme 1.2.1 *La matrice C est de rang n si et seulement si l'application linéaire*

$$\phi : L^\infty([0,T], \mathbb{R}^m) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$u \longmapsto \int_0^T e^{(T-t)A}Bu(t)dt$$

est surjective.

Preuve du Lemme 1.1

- Supposons tout d'abord que $rg(C) < n$, et montrons qu'alors ϕ n'est pas surjective. L'application C étant non surjective, il existe un vecteur $k \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$, que l'on supposera étre un vecteur ligne, tel que $kC = 0$. Par conséquent,
$$kB = kAB = ... = kA^{n-1}B = 0.$$

Or d'aprés le théorème d'Hamilton-Cayley([10]), il existe des réels a_0, a_1,...,a_{n-1} tels que

$$A^n = a_0 I + ... + a_{n-1}A^{n-1}$$

On en déduit par récurrence immédiate que, pour tout entier s,

$$kA^sB = 0,$$

et donc, pour tout $t \in [0,T]$,

$$ke^{tA}B = 0.$$

Par conséquent, pour tout contrôle u, on a

$$k\int_0^T e^{(T-t)A}Bu(t)dt = 0,$$

i.e. $k\phi(u) = 0$, ce qui montre que ϕ n'est pas surjective.

- Réciproquement, si ϕ n'est pas surjective, alors il existe un vecteur ligne $k \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$ tel que pour tout contrôle u on ait

$$k\int_0^T e^{(T-t)A}Bu(t)dt = 0,$$

Ceci implique que, pour tout $t \in [0,T]$

$$ke^{(T-t)A}B = 0.$$

En $t = T$ on obtient $kB = 0$. Ensuite, en dérivant par rapport é t, puis en prenant $t = T$, on obtient $kAB = 0$. Ainsi, par dérivations successives, on obtient finalement

$$kB = kAB = ...kA^{n-1}B = 0$$

donc $kC = 0$, et donc $rg(C) < n$. □

Ce lemme permet de montrer facilement le théorème.

Preuve du théoréme (1.2.2).

★ Si la matrice C est de rang n, alors d'aprés le lemme l'application ϕ est surjective, i.e. $\phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n$. Or, pour tout contrôle u, l'extrémité au temps T de la trajectoire associée é u est donnée par

$$x(T) = e^{TA}x_0 + \int_0^T e^{(T-t)A}(Bu(t) + r(t))dt,$$

de sorte que l'ensemble accessible en temps T depuis un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est

$$Acc(T, x_0) = e^{TA}x_0 + \int_0^T e^{(T-t)A}r(t)dt + \phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n \ ,$$

ce qui montre que le système est contrôlable.

★ Réciproquement si le système est contrôlable, alors il est en particulier contrôlable depuis x_0 défini par

$$x_0 = -e^{-TA}\int_0^T e^{(T-t)A}r(t)dt.$$

Or en ce point l'ensemble accessible en temps T s'écrit

$$Acc(T, x_0) = \phi(L^\infty),$$

et le systéme étant contrôlable cet ensemble est égal é $\mathbb{R}^n$. Cela prouve que ϕ est surjective, et donc, d'après le lemme, on conclut que la matrice C est de rang n.

□

Exemple 1.2.1 *Considérons le système linéaire suivant : $\dot{x} = Ax(t) + Bu(t)$ avec*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\alpha^2 & 0 & 0 & 2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\alpha & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

— *Pour* $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, *la matrice* $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2\alpha & -\alpha^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2\alpha & -\alpha^2 & 0 & 0 & -2\alpha^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\alpha & 0 & 0 & -4\alpha^2 \\ 0 & 1 & -2\alpha & 0 & 0 & -4\alpha^2 & 2\alpha^3 & 0 \end{pmatrix}$

La matrice extraite : $E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2\alpha & 0 \end{pmatrix}$ *est de rang 4 car*

$det(E) = -1 \neq 0$. *Donc le système est contrôlable dans ce cas.*

— *Pour* $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, *on obtient* $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -\alpha^2 \\ 1 & 0 & -\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha & 0 \\ 0 & -2\alpha & 0 & 2\alpha^3 \end{pmatrix}$ *et* $det(C) = 0$.

Donc $rg(C) < 4$ *et par conséquent le systéme n'est pas contrélable.*

Remarque 1.2.2 *Dans le cas où le contrôle u est contraint, c'est à dire qu'il appartient à un sous ensemble $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m$, les propriétés de contrôlabilité globale sont reliées aux propriétés de stabilité de la matrice A. En claire, si $r = 0$ et $0 \in \text{int}\,\mathbb{U}$, si de plus la condition de Kalman est vérifiée et si la matrice A est stable (toutes les valeurs propres de A sont de parties réelles strictement négatives), alors tout point de $\mathbb{R}^n$ peut étre conduit à l'origine en temps fini.*
Dans le cas mono-entrée $m = 1$ (u est un contrôle scalaire), on a le théorème suivant :

Théorème 1.2.3 *Considérons le système $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$, avec $b \in \mathbb{R}^n$ et $u(t) \in \mathbb{U}$, où $\mathbb{U} = [-a, a]$, $a > 0$. Alors tout point de $\mathbb{R}^n$ peut être conduit à l'origine en temps fini si et seulement si la paire (A, B) vérifie la condition de Kalman et la partie réelle de chaque valeur propre de A est inférieure ou égale à 0.*

1.2.2 contrôlabilité des systèmes non-linéaires

La contrôlabilité est un concept très important pour la compréhension des propriétés très structurelles et qualitatives. Cependant, son extension au cas non-linaire de dimension finie ou de dimension infinie à suscité près de cinquante ans une littératures considérable qui n'a en rien épuisé de ce sujet riche et varié. Les auteurs dans leur quasi-totalité on considéré des généralisation de $\dot{x} = Ax + Bu$. Néanmoins, il existe des techniques qui permettent de déduire la contrôlabilité local dans le cas des systémes linéarisés. Donc nous donnerons une condition sur la contrôlabilité local des systèmes non-linéaires.

Considérons un système de la forme

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \quad t \in [0, T] \\ \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1.16}$$

où $u \in L^\infty(]0, T[, \mathbb{R}^m)$ et f est de classe C^1 de $[0, T]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$. Ces hypothéses assurent, pour tout contrôle u, l'existence et l'unicité d'une solution maximale $x(t)$ sur un intervalle $J \subset [0, T]$, du problème de Cauchy (1.16) (voir [27]).
Soit $y \in Acc(T, x_0)$. Par définition, il existe un contrôle $u_y \in \mathbb{U}$ amenant l'état de x_0 à y en temps T.
Le problème de la contrôlabilité locale consiste à savoir si cette propriété reste satisfaite dans un voisinage du point y.
Considérons le cas particulier d'un **point d'équilibre** d'un système différentiel autonome, i.e., un couple $(\bar{x}, \bar{u})$ tel que $f(\bar{x}, \bar{u}) = 0$.

Définition 1.2.4 *Soit $A = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, \bar{u}) \in M_n(\mathbb{R})$ et $B = \dfrac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}, \bar{u}) \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ respectivement les matrices jacobiennes de f par rapport à la variable x et par rapport à la variable u évaluée en $(\bar{x}, \bar{u})$. Le système différentiel linéarisé autour de l'équilibre $(\bar{x}, \bar{u})$ est le système*

$$\begin{cases} \dfrac{d(\delta x)}{dt} = A\delta x(t) + B\delta u(t), \quad t \in [0, T] \\ \delta x(0) = 0_{\mathbb{R}}, \end{cases} \tag{1.17}$$

où δ est l'opérateur de différentiation, et δu des petites variations de u qui engendrent des petites variations de x notées δx.

Définition 1.2.5 (contrôlabilité locale) *On dit que le systéme de contrôle non-linéaire* (1.16) *est localement contrôlable au point d'équilibre $(\bar{x}, \bar{u})$ s'il existe $\epsilon > 0$ tel que pour tout point $x_1 \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $\| x_1 - \bar{x} \| < \epsilon$, il existe une commande u dans $L^\infty(]0, T[, \mathbb{R}^m)$ telle que $x_u(T) = x_1$, où x_u désigne la solution de* (1.16) *avec $x_0 = \bar{x}$ et à la commande u.*

Théorème 1.2.4 *On suppose qu'aucune contrainte n'est imposée sur le contrôle. Si le système différentiel linéarisé est contrôlable en temps T (autrement dit s'il satisfait la condition de Kalman), alors le systéme différentiel non-linéaire est localement contrôlable en temps T à partir de x_0.*

Nous disposons à présent d'outils de résolutions du problème de contrôlabilité exacte. Comme nous l'avons vu au début du chapitre, aprés la résolution de ce problème s'en suie généralement celui de contrôle optimal. Pour la résolution de cet deuxiéme problème, nous allons faire appel au principe du maximum de Pontryagin.

1.3 problème de contrôle optimal : Principe du maximum de Pontryagin

Le principe du maximum de Pontryagin est un outil génial qui permet d'écrire de facon pratique les conditions d'optimalités associées à un problème de contrôle optimal faisant intervenir la solution d'une équation différentielle contrôlée. Sans quoi nous obtenons en général une formulation très difficilement exploitable, même dans les cas très simple.
Dans cette section nous donnons une version générale du principe du maximum de Pontryagin, ce théoréme est difficile é démontrer. En revanche lorsqu'il n'y a pas de contrainte sur le contrôle, la preuve est simple, et on arrive au principe du maximum dit faible. C'est à cette version plus simple que nous allons nous intéresser. Puis nous passerons au cas général et enfin évoquer le cas du systéme linéaire, qui est très solliciter au chapitre 3.

1.3.1 Cas sans contrainte sur le contrôle : principe du maximum faible

Le problème de Lagrange

Le problème de Lagrange consiste à chercher des conditions nécessaires d'optimalité pour le systéme

$$\dot{x}(t) = f\Big(t, x(t), u(t)\Big), \tag{1.18}$$

associé à un problème de minimisation d'un coût de la forme

$$C(u) = \int_0^T f^0(t, x(t), u(t))dt, \tag{1.19}$$

où T est fixé, les contrôles $u(\cdot) \in \mathbb{U}$ sont définis sur $[0, T]$ et les trajectoires associées doivent vérifier $x(0) = x_0$ et $x(T) = x_1$

Théorème 1.3.1 (Principe du maximum faible, cas de Lagrange) *Si le contrôle u associé au systéme de contrôle* (1.18) *est optimal pour le coût* (1.19), *alors il existe une application* $p(\cdot)$ *absolument continue sur* $[0, T]$, *'a valeurs dans* $\mathbb{R}^n$ *, appelée vecteur adjoint, et un réel* $p^0 \leqslant 0$, *tels que le couple* $(p(\cdot), p^0)$ *est non trivial, et les équations suivantes sont vérifiées pour presque tout* $t \in [0, T]$

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \tag{1.20}$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \tag{1.21}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = 0, \tag{1.22}$$

où $H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, f(t, x, u)\rangle + p^0 f^0(t, x, u)$.

Ce théorème est prouvé dans [27], page 98 à 99

Le problème de Mayer-Lagrange

Soit M_1 une variété de $\mathbb{R}^n$, et

$$C(t, u) = \int_0^t f^0(s, x_u(s), u(s))ds + g(t, x_u(t)). \tag{1.23}$$

Le problème de Mayer-Lagrange est le suivant :
Déterminer une trajectoire solution de $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$, $x(0) = x_0$, et $x(\cdot)$ minimise le coût (1.23) sur $[0, T]$, où le temps final t n'est pas fixé, les contrôles $u(\cdot)$ sont dans l'ensemble $\mathbb{U}$ des contrôles admissibles sur $[0, t_e(u)[$, telle que $x(T) \in M_1$.

Remarque 1.3.1 *Si on envisage le problème de Mayer-Lagrange à temps final fixé T, alors on considére le coût*

$$C_T(u) = \int_0^T f^0(s, x_u(s), u(s))ds + g(T, x_u(T)) \tag{1.24}$$

Théorème 1.3.2 (Le Principe du Maximum faible, cas de Mayer-Lagrange) *Si le contrôle u est optimal sur $[0, T]$ alors il existe une application $p : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue, et un réel $p^0 \leqslant 0$, tels que le couple $(p(\cdot), p^0)$ est non trivial, et*

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \tag{1.25}$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \tag{1.26}$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)) = 0, \tag{1.27}$$

où $H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, f(t, x, u)\rangle + p^0 f^0(t, x, u)$. Si de plus, la cible M_1 est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ alors il existe des réels $\lambda_1, ..., \lambda_p$ tels que l'on ait au point final (T, x_1)

$$p(T) = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \nabla F_i + p^0 \frac{\partial g}{\partial x}. \tag{1.28}$$

De plus si le temps final n'est pas fixé dans le problème de contrôle optimal, et si u est continu au temps T, alors on a au temps final T

$$H(T, x(T), p(T), p^0, u(T)) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, x(T)). \tag{1.29}$$

Vous pouvez retrouver la preuve de ce théorème sur les pages 100 – 102 de [27]

1.3.2 Principe du maximum de Pontryagin, version générale

La version forte suivante du principe du maximum de Pontryagin (PMP) est très générale, puisqu'elle est valide pour des systèmes différentiels généraux et qu'elle prend en compte des contraintes sur le contrôle. On considère le système de contrôle dans $\mathbb{R}^n$

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)), \tag{1.30}$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 et où les contrôles sont des applications mesurables et bornées définies sur un intervalle $[0, T_e(u)[$ de $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m$. Par ailleurs on définit la fonctionnelle de coût

$$C(T, u) = \int_0^T f^0(s, x(s), u(s))ds + g(T, x(T)), \tag{1.31}$$

où

$$f^0 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

sont C_1 et $x(\cdot)$ est la trajectoire solution de (1.30) associée au contrôle u.
On considère le problème suivant :
problème de contrôle optimal : déterminer une trajectoire reliant M_0 à M_1 et minimisant le coût. Le temps final peut etre fixé ou non.
Mathématiquement, ce problème se réécrit

$$\inf_{0<T<T_e(u)|u\in\mathbb{U}} C(T,u) \tag{1.32}$$

où $\mathbb{U}$ désigne l'ensemble des contrôles admissibles u dont les trajectoires associées relient un point initial de M_0 à un point final de M_1 en temps $T(u) < T_e(u)$.

Définition 1.3.1 (Espace tangent) *Supposons que la variété M_1 est donnée par*

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = 0\}, \tag{1.33}$$

où F est une fonction de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$, avec $\operatorname{rang} dF = p$ *sur M_1.*
En écrivant $F = (F_1, ..., F_p)$ où les fonctions F_i sont à valeurs réelles, il vient

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid F_1(x) = ... = F_p(x) = 0\}, \tag{1.34}$$

et de plus l'espace tangent à M_1 en un point $x \in M_1$ est

$$T_x M_1 = \{v \in \mathbb{R}^n \mid \nabla F_i(x).\ v = 0,\ i = 1, ..., p\}. \tag{1.35}$$

Définition 1.3.2 (Hamiltonien) *On définit le Hamiltonien H du système de contrôle optimal* (1.30)-(1.31) *sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}^m$ par*

$$H(t, x, p, p^0, u) = \langle p, f(t, x, u)\rangle + p^0 f^0(t, x, u). \tag{1.36}$$

Théorème 1.3.3 (Principe du maximum de Pontryagin, version générale) *Soient M_0 et M_1 deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$.*
Si le contrôle $u \in \mathbb{U}$ associé à la trajectoire $x(\cdot)$ est optimal sur $[0, T]$, alors il existe une application $p(\cdot) : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continue appelée vecteur adjoint, et un réel $p^0 \leq 0$, tels que le couple $(p(\cdot), p^0)$ est non trivial, et tels que, pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \tag{1.37}$$

$$\dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(t, x(t), p(t), p^0, u(t)), \tag{1.38}$$

et on a la condition de maximisation presque partout sur $[0, T]$

$$\max_{v\in\mathbb{U}} H(t, x(t), p(t), p^0, v) = H(t, x(t), p(t), p^0, u(t)). \tag{1.39}$$

Si de plus le temps final pour joindre la cible M_1 n'est pas fixé, on a la condition au temps final T.

$$\max_{v\in\mathbb{U}} H(T, x(T), p(T), p^0, v) = -p^0 \frac{\partial g}{\partial t}(T, x(T)). \tag{1.40}$$

Si de plus M_0 et M_1 (ou juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de $\mathbb{R}^n$ ayant des espaces tangents en $x(0) \in M_0$ et $x(T) \in M_1$, alors le vecteur adjoint peut étre construit de maniére à vérifier les conditions de transversalité aux deux extrémités (ou juste l'une des deux)

$$p(0) \perp T_{x(0)} M_0, \tag{1.41}$$

$$p(T) - p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(T, x(T)) \perp T_{x(T)} M_1. \tag{1.42}$$

Remarque 1.3.2 .

i. Si le contrôle u est continu au temps T, la condition (1.40) *peut s'écrire*

$$H(T,x(T),p(T),p^0,u(T)) = -p^0\frac{\partial g}{\partial t}(T,x(T)). \tag{1.43}$$

ii. Si la variété M_1 s'écrit sous la forme

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^n | F_1(x) = ... = F_p(x) = 0\}, \tag{1.44}$$

où les F_i sont des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ (de gradients indépendants sur M_1), alors la condition de (1.42) *se met sous la forme*

$$\exists\ \lambda_1,...,\lambda_p \in \mathbb{R} \mid p(T) = \sum_{i=1}^{p}\lambda_i \nabla F_i(x(T)) + p^0\frac{\partial g}{\partial x}(T,x(T)). \tag{1.45}$$

iii. La convention $p^0 \leqslant 0$ conduit au principe du maximum. La convention $p^0 \geqslant 0$ conduirait au principe du minimum, i.e. la condition (1.39) *serait une condition de minimum.*

iv. Dans le cas où $\mathbb{U} = \mathbb{R}^m$, i.e. lorsqu'il n'y a pas de contrainte sur le contrôle, la condition de maximum (1.39) *implique $\dfrac{\partial H}{\partial u} = 0$, et on retrouve le principe du maximum faible.*

Conditions de transversalité

Définition 1.3.3 *Les conditions* (1.41) *et* (1.42) *sont appelées conditions de transversalité sur le vecteur adjoint. La condition* (1.43) *est appelée condition de transversalité sur le Hamiltonien. Elles sont ici écrites de manière très générale, et dans les deux paragraphes suivants nous allons les réécrire dans des cas plus simples.*

Conditions de transversalité sur le vecteur adjoint Dans ce paragraphe le temps final pour atteindre la cible peut être fixé ou non. Réécrivons les conditions (1.41) et (1.42) dans les deux cas importants suivants.

i. **Problème de Lagrange** Dans ce cas le coût s'écrit

$$C(t,u) = \int_0^t f^0(s,x(s),u(s))ds \tag{1.46}$$

i.e. $g = 0$. Les conditions de transversalité (1.41) et (1.42) sur le vecteur adjoint s'écrivent alors

$$p(0) \perp T_{x(0)}M_0, \quad p(T) \perp T_{x(T)}M_1.$$

Remarque 1.3.3 *Si par exemple $M_0 = \{x_0\}$, la condition* (1.41) *devient vide. Si au contraire $M_0 = \mathbb{R}^n$, i.e. si le point initial n'est pas fixé, on obtient $p(0) = 0$.*
De méme, si $M_1 = \mathbb{R}^n$, on obtient $p(T) = 0$. Autrement dit si le point final est libre alors le vecteur adjoint au temps final est nul.

ii. **problème de Mayer** Dans ce cas le coût s'écrit

$$C(t,u) = g(t,x(t)), \tag{1.47}$$

i.e. $f^0 = 0$. Les conditions de transversalité (1.41) et (1.42) (ou (1.45)) ne se simplifient pas a priori.

Mais dans le cas particulier important où $M_1 = \mathbb{R}^n$, autrement dit le point final $x(T)$ est libre, la condition (1.42) devient

$$p(T) = p^0 \frac{\partial g}{\partial x}(T, x(T)). \tag{1.48}$$

Si de plus g ne dépend pas du temps, on a coûtume d'écrire

$$p(T) = p^0 \nabla g(x(T)), \tag{1.49}$$

autrement dit le vecteur adjoint au temps final est égal, à la constante p^0 prés, au gradient de g pris au point final.

Condition de transversalité sur le Hamiltonien La condition (1.40) n'est valable que si le temps final pour atteindre la cible n'est pas fixé. Dans ce paragraphe nous nous placons donc dans ce cas.
La seule simplification notable de cette condition est le cas où la fonction g ne dépend pas du temps t (ce qui est vrai par exemple pour un problème de Lagrange), et la condition de transversalité (1.43) sur le Hamiltonien devient alors

$$\max_{v \in \Omega} H(T, x(T), p(T), p^0, v) = 0,$$

ou encore, si u est continu au temps T,

$$H(T, x(T), p(T), p^0, u(T)) = 0,$$

Autrement dit le Hamiltonien s'annule au temps final.

Généralisation des conditions de transversalité

Pour écrire les conditions de transversalité associées à un problème de contrôle plus général, il faut écrire les relations adéquates en termes de multiplicateurs de Lagrange.

Par exemple considérons un problème de Lagrange avec des conditions aux limites mélangées, i.e. on cherche une trajectoire solution de

$$\dot{x} = f(t, x(t), u(t)), \tag{1.50}$$

minimisant le coût

$$C(T, u) = \int_0^T f^0(t, x(t), u(t)) dt, \tag{1.51}$$

et vérifiant les conditions aux limites

$$(x(0), x(T)) \in M, \tag{1.52}$$

où M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.
On peut alors montrer (voir [26]) que dans ce cas les conditions de transversalité (1.41) et (1.42) sur le vecteur adjoint s'écrivent

$$(-p(0), p(T)) \perp T_{(x(0),x(T))} M. \tag{1.53}$$

Un cas important de conditions mélangées est le cas des trajectoires périodiques,
i.e. $x(0) = x(T)$ non fixé. Dans ce cas on a

$$M = \{(x, x) | x \in \mathbb{R}^n\} \tag{1.54}$$

et la condition de transversalité donne

$$p(0) = p(T) \tag{1.55}$$

Autrement dit, non seulement la trajectoire est périodique, mais aussi son relévement extrémal.

1.3.3 Principe du maximum de Pontryagin dans le cas linéaire

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un contrôle soit extrémal.

Théorème 1.3.4 *Considérons le système de contrôle linéaire*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + r(t), \quad x(0) = x_0, \tag{1.56}$$

où le domaine de contraintes $\mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m$ sur le contrôle est compact. Soit $T > 0$. Le contrôle u est extrémal sur $[0, T]$ si et seulement s'il existe une solution non triviale $p(t)$ de l'équation $\dot{p}(t) = -p(t)A(t)$ telle que

$$p(t)B(t)u(t) = \max_{v \in \mathbb{U}} p(t)B(t)v$$

pour presque tout $t \in [0, T]$. Le vecteur ligne $p(t) \in \mathbb{R}^n$ est appelé vecteur adjoint.

La preuve est faite dans [27], de la page 36 à la page 38.

Remarque 1.3.4 *Dans le cas mono-entrée (contrôle scalaire), et si de plus $\mathbb{U} = [-a, a]$ oé $a > 0$, la condition de maximisation implique immédiatement que $u(t) = a\,\mathrm{sgn}(p(t)B(t))$ si $p(t)B(t) \neq 0$. La fonction $\varphi(t) = p(t)B(t)$ est appelée fonction de commutation, et un temps t_c auquel le contrôle extrémal $u(t)$ change de signe est un temps de commutation. C'est en particulier un zéro de la fonction φ.*

1.4 Analyse du problème LQ

Dans cette partie on s'intéresse aux systémes de contrôle linéaires avec un coût quadratique. Ces systémes sont d'une grande importance dans la pratique, surtout dans les problème de poursuite, où l'on minimise l'écart au carré par rapport é une trajectoire nominale, et dans des problèmes de stabilisation, où l'on est très souvent amené à linéariser un systéme non linéaire le long d'une trajectoire.

Considérons un systéme dynamique linéaire autonome

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad t \in [0, T], \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^{\varkappa}, \end{cases} \tag{1.57}$$

associé à la fonction coût quadratique J définie par

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_0^T [(Qx(s), x(s)) + (Rv(s), v(s))]ds + \frac{1}{2}(Dx(T), x(T)) \tag{1.58}$$

où R est une matrice de $M_m(\mathbb{R})$ définie positive, $Q \in M_n(\mathbb{R})$ et $D \in M_n(\mathbb{R})$ sont supposées semi définie positives.

Le problème du contrôle optimal LQ((linéaire-quadratique) s'écrit :

trouver une commande $u \in L^2([0,T],\mathbb{R}^m)$ telle que la trajectoire $x(\cdot)$ associée au système (1.57) minimise J.
Remarquons que dans le modèle considéré, il n'y a pas de contrainte sur les commandes, i.e. $\mathbb{U} = \mathbb{R}^m$, et il n'y a pas non plus de contrainte sur l'état final $x(T)$ qui se présente dans la fonction du coût J comme une pénalisation.

1.4.1 Existence de trajectoires optimales

Théorème 1.4.1 (Existence et unicité) *Le problème*

$$\inf_{v\in L^2([0,T],\mathbb{R}^m)} J(v) \tag{1.59}$$

a une solution unique.

La preuve de cet théoréme est faite dans [27] de la page 50 à 51

Remarque 1.4.1 (extension du résultat précédent) .

- *Si le systéme de contrôle est perturbé par une fonction $r(t)$ i.e pour un systémes linéaires perturbés $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t)$, alors le théoréme précédent reste vrai.*
- *Il reste également valable si $T = \infty$ avec $D = 0$ et $r = 0$, pourvu que le systéme (1.57) soit contrélable (en temps quelconque).*
  En effet il suffit juste de montrer qu'il existe des trajectoires solutions du systéme (1.57) sur $[0,+\infty[$ et de coût fini. Or si le systéme est contrôlable, alors il existe un contrôle u et un temps $T > 0$ tel que la trajectoire associée é u relie x_0 é 0 sur $[0,T]$. On étend alors le contrôle u par 0 sur $]T,+\infty[$, de sorte que la trajectoire reste en 0. On a ainsi construit une trajectoire solution du système sur $[0,+\infty[$ et de coût fini. Ceci permet d'affirmer l'existence d'une suite de contrôles minimisants. On obtient donc le résultat suivant.

Proposition 1.4.1 *Considérons le problème de déterminer une trajectoire solution de*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{1.60}$$

sur $[0+\infty[$ et minimisant le coût

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} [(Qx(s),x(s)) + (Ru(s),u(s))]ds. \tag{1.61}$$

Si le systéme est contrôlable en un temps $T > 0$, alors il existe une unique trajectoire minimisante.

1.4.2 Condition nécessaire et suffisante d'optimalité

Théorème 1.4.2 (Principe du maximum de Pontryagin (PMP)) *La trajectoire x, associée é la commande u, est optimale pour le problème LQ si et seulement s'il existe une variable d'état adjoint p définie par*

$$\begin{cases} \dot{p}(t) + A^t p(t) = -Qx(t) \quad t \in [0,T] \\ p(T) = Dx(T). \end{cases} \tag{1.62}$$

De plus la commande optimale u est caractérisée par

$$u(t) = -R^{-1}B^t p(t). \tag{1.63}$$

Confère les pages 53 à 55 de [27] pour la preuve.

Remarque 1.4.2 (le PMP en pratique) *:*

i. Définissons le Hamiltonien H par

$$H(x,u,p) = \frac{1}{2}[(Qx,x)+(Ru,u)]+(p,Ax+Bu). \tag{1.64}$$

Alors le vecteur $u(t)$ est solution du problème

$$\frac{\partial}{\partial u}H(x(t),u,p(t)) = 0. \tag{1.65}$$

Ainsi pour tout $0 \leq t \leq T$ fixé, la fonction $u \mapsto H(x(t),u,p(t))$ atteint son minimum en $u = -R^{-1}B^t p(t)$. Autrement dit, la commande optimale u réalise le minimum instantané de cette fonction.

ii. En reportant l'expression de u dans l'équation sur l'état, on obtient le systéme de 2n variables

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) - BR^{-1}B^t p(t), \quad x(0) = x_0 \\ \dot{p}(t) = -A^t p(t) - Qx(t) \quad t \in [0,T] \\ p(T) = Dx(T), \end{cases} \tag{1.66}$$

qui caractérise parfaitement la trajectoire optimale. Attention, il ne s'agit pas d'un problème de Cauchy standard, puisque qu'il fait intervenir des conditions initiale et finale. Néanmoins, on va voir plus loin que la commande optimale u peut s'exprimer sous forme de boucle fermée grâce à l'équation de Riccati.

iii. D'une maniére plus commode, le systéme ci-dessus s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{\partial H}{\partial p} = Ax + Bu \quad \textit{(équation d'état)} \\ \dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial x} = -(A^t p + Qx) \quad \textit{(équation adjointe)} \\ \dfrac{\partial H}{\partial u} = B^t p + Ru = 0 \textit{ (condition d'optimalité).} \end{cases} \tag{1.67}$$

1.4.3 équation de Riccati et contrôle de boucle fermée

Théorème 1.4.3 (équation de Riccati) *Il existe une unique matrice symétrique $E \in C^1([0,T])$ de taille n telle que la trajectoire $x(t)$ et l'état adjoint $p(\cdot)$ sont liés par la relation suivante*

$$p(t) = E(t)x(t). \tag{1.68}$$

La matrice E est solution de l'équation matricielle de Riccati

$$\begin{cases} \dot{E}(t) = -Q - A^t E(t) - E(t)A + E(t)BR^{-1}B^t E(t) \quad t \in [0,T] \\ E(T) = D. \end{cases} \tag{1.69}$$

Pour la preuve nous renvoyons le lecteur dans [27], de la page 58 à 60

Remarque 1.4.3 *l'équation de Riccati stationnaire est définie par :*

$$A^t E + EA - EBR^{-1}B^t E + Q = 0. \tag{1.70}$$

Remarque 1.4.4 (Commande feedback) *En utilisant* (1.68), *on obtient*

$$u(t) = -R^{-1}B^t p(t) = -R^{-1}B^t E(t)x(t).$$

La commande optimale u se met donc sous forme de boucle fermée. Ainsi la commande peut être calculée via la sortie $x(t)$ à tout instant t et le systéme dynamique devient

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A - BR^{-1}B^t E(t))x(t) \quad t \in [0, T] \\ \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{1.71}$$

Conclusion

La théorie de contrôle est un moyen idéal pour manipuler et commander les processus physiques. Il existe plusieurs types de systémes de contrôle selon le processus physique modélisé. Pour qu'un systéme soit contrôlable, il faut remplir un certain nombre de conditions, lesquelles dépendent de sa nature. Le principe de du maximum de Pontryagin est un outil incontournable dans la résolution du problème de contrôle optimal. Il existe également des méthodes de résolution numérique.

2

Méthodes numériques en contrôle optimal

Introduction

Il existe deux types de méthodes numériques en contrôle optimal : les méthodes directes et les méthodes indirectes. Les méthodes directes consistent é discrétiser l'état et le contrôle, pour réduire le problème é un problème d'optimisation non linéaire (programmation non linéaire). Les méthodes indirectes consistent é résoudre numériquement, par une méthode de tir, un problème aux valeurs limites obtenu par application du principe du maximum. Dans ce chapitre, nous nous intéressons d'abord aux méthodes indirectes, puis aux méthodes directes. Dans une derniére section, nous comparons les méthodes, et nous décrivons les méthodes hybrides qui sont un mélange des deux approches.

2.1 Méthodes indirectes

2.1.1 la méthode de Newton

Soit $G : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction de classe C^1.
La méthodes de Newton permet de résoudre numériquement

$$G(z) = 0. \tag{2.1}$$

L'idée de base est la suivante. Si z_k est proche d'un zéro z de G, alors

$$0 = G(z) = G(z_k) + dG(z_k).(z - z_k) + \circ(z - z_k). \tag{2.2}$$

On est alors amené à considérer la suite définie par récurrence

$$z_{k+1} = z_k - (dG(z_k))^{-1}.G(z_k), \tag{2.3}$$

pour un point initial $z_0 \in \mathbb{R}^p$ choisi, et on espére que z_k converge vers le zéro z. Ceci suppose donc le calcul de l'inverse de la matrice jacobienne de G, ce qui doit étre évité numériquement. Il s'agit alors, à chaque étape, de résoudre l'équation

$$G(z_k) + dG(z_k).d_k = 0, \tag{2.4}$$

où d_k est appelé direction de descente, et on pose $z_{k+1} = z_k + d_k$

Sous des hypothéses générales, l'algorithme de Newton converge, et la convergence est quadratique (voir par exemple [26]).

Remarque 2.1.1 *La méthode de Newton est très sollicitée dans l'application d'une méthode de tir. Elle peut permettre une détermination très précise d'un zéro. Son inconvénient principal est la petitesse du domaine convergence. Pour faire converger la méthode, il faut que le point initial z_0 soit suffisamment proche de la solution recherchée z. Ceci suppose donc que pour déterminer le zéro z il faut avoir au préalable une idée approximative de la valeur de z.*
Du point de vue du contrôle optimal, cela signifie que, pour appliquer une méthode de tir, il faut avoir une idée a priori de la trajectoire optimale cherchée. Ceci peut sembler paradoxal, mais il existe des moyens de se donner une approximation, même grossiére, de cette trajectoire optimale.

2.1.2 Méthode de tir simple

Le principe est le suivant. Considérons le problème de contrôle optimal (1.30), et supposons dans un premier temps que le temps final t_f est fixé. Le principe du maximum donne une condition nécessaire d'optimalité et affirme que toute trajectoire optimale est la projection d'une extrémale. Si l'on est capable, à partir de la condition de maximum, d'exprimer le contrôle extrémal en fonction de $(x(t), p(t))$, alors le systéme extrémal est un systéme différentiel de la forme $\dot{z}(t) = F(t, z(t))$, où $z(t) = (x(t), p(t))$, et les conditions initiales, finales, et les conditions de transversalité, se mettent sous la forme $R(z(0), z(t_f)) = 0$. Finalement, on obtient le problème aux valeurs limites

$$\begin{cases} \dot{z} = F(t, z(t)), \\ \\ R(z(0), z(t_f)) = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Notons $z(t, z_0)$ la solution du problème de Cauchy

$$\dot{z}(t) = F(t, z(t)), \quad z(0) = z_0 \tag{2.6}$$

et posons

$$G(z_0) = R(z_0, z(t_f, z_0)). \tag{2.7}$$

Le problème (2.5) aux valeurs limites est alors équivalent à

$$G(z_0) = 0, \tag{2.8}$$

i.e. il s'agit de déterminer un zéro de la fonction G.

Ceci peut se résoudre par une méthode de Newton.

Remarque 2.1.2 *Si le temps final t_f est libre, on peut se ramener à la formulation précédente en considérant t_f comme une inconnue auxiliaire, On augmente alors la dimension de l'état en considérant l'équation supplémentaire $\dfrac{dt_f}{dt} = 0$. On peut utiliser le méme artifice si le contrôle est bang- bang, pour déterminer les temps de commutation.*
Il peut cependant s'avérer préférable, lorsque le temps final est libre, d'utiliser la condition de transversalité sur le Hamiltonien.

Pour améliorer la stabilité de la méthode on peut découpe l'intervalle $[0, t_f]$ en N intervalles $[t_i, t_{i+1}]$, et se donne comme inconnues les valeurs $z(t_j)$ au début de chaque sous-intervalle en prenant en compte des conditions de recollement en chaque temps t_i (conditions de continuité). Cette maniére de procéder est connue sous le nom de "méthode de tir multiple", l'intéresser trouvera son algorithme, et plus de détails dans [27] *de la page* 171 *à la page* 173.

2.2 Méthodes directes

Les méthodes directes consistent é transformer le problème de contrôle optimal en un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie.
Nous abordons ici l'une de ces méthodes, la discrétisation totale : tir direct.
Cette méthode consiste é discrétiser l'état et le contrôle, puis se ramener à un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie (ou problème de programmation non linéaire) de la forme

$$\min_{z \in C} F(Z) \tag{2.9}$$

Oé

$$Z = (x_1, ..., x_N, u_1, ..., u_n),$$

et

$$C = \{Z \mid g_i(Z) = 0, i \in 1, ..., r,\ g_j(Z) \leqslant 0, j \in r+1, ..., m\} \tag{2.10}$$

Plus précisément, la méthode consiste à choisir les contrôles dans un espace de dimension finie, et à utiliser une méthode d'intégration numérique des équations différentielles.
Considérons donc une subdivision $0 = t_0 < t_1 < ... < t_N = t_f$ de l'intervalle $[0, t_f]$. Réduisons l'espace des contrôles en considérant (par exemple) des contrôles constants par morceaux selon cette subdivision. Par ailleurs, choisissons une discrétisation de l'équation différentielle, par exemple choisissons ici (pour simplifier) la méthode d'Euler explicite (confére [30], à partir de la page 13). On obtient alors le problème de programmation non linéaire suivante, en posant $b_i = t_{i+1} - t_i$,

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + b_i f(t_i, x_i, u_i), \quad i = 0, ..., N-1, \\ \min C(x_0, ..., x_N, u_0, ..., u_N), \\ u_i \in \Omega, \quad i = 0, ..., N-1, \end{cases} \tag{2.11}$$

i.e. un problème du type (2.9).

D'un point de vue plus général, cela revient à choisir une discrétisation des contrôles, ainsi que de l'état, dans certains espaces de dimension finie :

$$u \in Vect(U_1, ..., U_N), \quad i.e. u(t) = \sum_{i=1}^{N} u_i U_i(t), \quad u_i \in \mathbb{R}, \tag{2.12}$$

$$x \in Vect(X_1, ..., X_N), \quad i.e. x(t) = \sum_{i=1}^{N} x_i X_i(t), \quad x_i \in \mathbb{R}, \tag{2.13}$$

où les $U_i(t)$ et $X_i(t)$ représentent une base de Galerkin. Typiquement, on peut choisir des approximations polynomiales par morceaux. L'équation différentielle, ainsi que les éventuelles contraintes sur l'état ou le contrôle, ne sont vérifiées que sur les points de la discrétisation. On se raméne bien à un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie de la forme (2.9).

Il existe plusieurs méthode de résolution numérique d'un problème de programmation non linéaire du type (2.9). On peut par exemple utiliser une méthode de pénalisation, ou une méthode SQP (sequelltial quadratic programmillg).
Dans ces méthodes, le but est de se ramener à des sous-problèmes plus simples, sans contraintes,

en utilisant des fonctions de pénalisation pour les contraintes, ou bien d'appliquer les conditions nécessaires de Kuhn-Tucker pour des problèmes d'optimisation avec contraintes. Pour le problème (2.9), (2.10), sous qualification des contraintes, les conditions de Kuhn-Tucker s'écrivent

$$\nabla F(Z) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(Z) = 0, \tag{2.14}$$

où les multiplicateurs de Lagrange λ_i vérifient

$$\lambda_i g_i(Z) = 0, \quad i \in \{r+1, ..., m\}, \text{et} \lambda_i \geqslant 0, \quad i \in \{r+1, ..., m\}. \tag{2.15}$$

Les méthodes SQP consistent à calculer de maniére itérative ces multiplicateurs de Lagrange, en utilisant des méthodes de Newton. A chaque itération, on utilise une méthode de Newton pour estimer le Hessien du Lagrangien associé au problème de programmation non linéaire, et on résout un sous-problème de programmation quadratique basé sur une approximation quadratique du Lagrangien. Pour plus de détails sur cette méthode, voir [30].

Remarque 2.2.1 *Il existe une infinité de variantes de cette méthode. D'une part, on peut discrétiser l'ensemble des contrôles admissibles par des contrôles constants par morceaux, ou affines par morceaux, ou des splines, etc. D'autre part, il existe de nombreuses méthodes pour discrétiser une équation différentielle ordinaire : méthode d'Euler (explicite ou implicite), point milieu, Heun, RungeKutta, Adams-Moulton, etc (voir par exemple* [10]*). Le choix de la méthode dépend du problème abordé.*
Par ailleurs, c'est la méthode la plus évidente lorsqu'on aborde un problème de contrôle optimal. elle est très simple é mettre en œuvre. De plus l'introduction d'éventuelles contraintes sur l'état ne pose aucun problème.

2.3 Analyse des méthodes en vu d'un meilleur choix

2.3.1 Analyse des méthodes directes

Les méthodes directes présentent les avantages suivants sur les méthodes indirectes :

- Contrairement aux méthodes indirectes, elles sont peu sensibles au choix de la condition initiale (cf ci-dessous) ;
- Contrairement au méthode indirectes, leur mise en œuvre est plus simple car elles ne nécessitent pas une étude théorique préalable comme elles ; en particulier, on n'a pas à étudier les variables adjointes, ou bien à connaétre à l'avance la structure des commutations ;
- Avec elles, il est facile de tenir compte d'éventuelles contraintes sur l'état et de calculer les contrôles en boucle ouverte ; une commande en boucle fermée exige une construction supplémentaire, comme un horizon glissant.

En revanche,

- Les méthodes directes peuvent devenir inefficaces si la dimension d'espace est trop grande car elles sont gourmandes en mémoire ;
- la discrétisation directe d'un problème de contrôle optimal comporte souvent plusieurs minima (locaux), et les méthodes directes peuvent converger vers ces minima ; pourtant la solution ainsi déterminée peut s'avérer être très éloignée de la vraie solution optimale ;
- les méthodes directes sont moins précises que les méthodes indirectes, en effet, malgré l'augmentation du nombre de pas de la discrétisation, leur précision s'avère en

général insuffisante, c'est le cas dans les problèmes de contrôle optimal issus de l'aéronautique ;

2.3.2 Analyse des méthodes indirectes

Les avantages des méthodes indirectes sont :

- l'extréme précision numérique ;
- la méthode de tir multiple est, par construction, parallélisable, et son implémentation peut donc étre envisagée sur un réseau d'ordinateurs montés en parallèle.

Les inconvénients des méthodes indirectes sont les suivants :

- Avec ces méthodes, il faut être capable de deviner de bonnes conditions initiales pour l'état et le vecteur adjoint, pour espérer faire converger la méthode de tir. En effet le domaine de convergence de la méthode de Newton peut étre assez petit en fonction du problème de contrôle optimal
- elles calculent les contrôles optimaux sous forme de boucle ouverte ;
- Ces méthodes sont basées sur le principe du maximum qui est une condition nécessaire d'optimalité seulement, et donc il faut étre capable de vérifier a posteriori l'optimalité de la trajectoire calculée ;
- Elles sont rigides : la structure des commutations doit étre connue é l'avance (par exemple par une étude géométrique du problème). De méme, il n'est pas facile d'introduire des contraintes sur l'état, car d'une part cela requiert d'appliquer un principe du maximum tenant compte de ces contraintes (qui est beaucoup plus compliqué que le principe du maximum standard), d'autre part la présence de contraintes sur l'état peut rendre compliquée la structure de la trajectoire optimale, notamment la structure de ses commutations.

Tableau récapitulatif

Le tableau suivant résume les caractéristiques des méthodes directes et indirectes.

	Méthode directes	Méthodes indirectes
Avantages	mise en œuvre simple, sans connaissance a priori ; facilité de la prise en compte de contraintes sur l'état ; contrôles calculés en boucle ouverte ; peu sensible au choix de la condition initiale ; efficaces en basse dimension	très grande précision numérique ; efficaces en toute dimension ; calculs parallélisables
Inconvénients	gourmandise en mémoire ; précision numérique basse ou moyenne ; problème des minima locaux	connaissance a priori de la structure de la trajectoire optimale ; très sensible au choix de la condition initiale difficulté théorique de la prise en compte de contraintes sur l'état ; petit domaine de convergence ; contrôles(localement) optimaux en boucle ouverte

2.4 Méthode hybride

Pour résoudre le problème majeur des méthodes indirectes, é savoir la sensibilité extréme par rapport à la condition initiale, nous proposons **une méthode hybride** en combinant les deux approches méthodes directes et indirectes. Le principe est le suivant. Quand on aborde un problème de contrôle optimal, on peut d'abord essayer de mettre en œuvre une méthode directe. On peut ainsi espérer obtenir une idée assez précise de la structure des commutations, ainsi qu'une bonne approximation de la trajectoire optimale, et du vecteur adjoint associé. Si on souhaite plus de précision numérique, on met alors en œuvre une méthode de tir, en espérant que le résultat fourni par la méthode directe donne une approximation suffisante de la trajectoire optimale cherchée, fournissant ainsi un point de départ appartenant au domaine de convergence de la méthode de tir. En combinant ainsi les deux approches (méthodes directes puis indirectes), on peut bénéficier de l'excellente précision numérique fournie par la méthode de tir tout en réduisant considérablement le désavantage due à la petitesse de son domaine de convergence. En appliquant d'abord une méthode directe, on peut obtenir une approximation de l'état adjoint. En effet, on a vu qu'une méthode directe consiste à résoudre numériquement un problème de programmation non linéaire avec contraintes. Les multiplicateurs de Lagrange associés au Lagrangien de ce problème de programmation non linéaire donnent une approximation de l'état adjoint (on a déjà vu que le vecteur adjoint n'est rien d'autre qu'un multiplicateur de Lagrange). A ce sujet, voir [19]. Une deuxiéme solution consiste à utiliser une méthode d'homotopie (ou méthode de continuation). Il s'agit de construire une famille de problèmes de contrôle optimal $(P_\alpha)_{\alpha\in[0,1]}$, dépendant d'un paramétre $\alpha \in [0,1]$, où le problème initial correspond à P_0. On doit s'arranger pour que le problème P_1 soit plus simple à résoudre que P_0.

Conclusion

En somme, on utilisera plutét une méthode directe si

— on n'a pas besoin d'une grande précision de calcul ;
— la dimension d'espace est assez petite ;
— on n'a aucune idée a priori de la trajectoire optimale recherchée, par exemple on ne sait rien sur la structure des commutations ;
— on veut introduire facilement des contraintes sur l'état.

On utilisera plutét une méthode indirecte

— si la dimension d'espace est assez grande ;
— si on a besoin de calculer la trajectoire optimale de maniére très précise ;
— dans un deuxiéme temps, aprés avoir appliqué une méthode directe qui a donné une premiére approximation de la solution optimale.

Conclusion

La résolution numérique d'un problème de contrôle optimal s'effectue généralement avec la méthode directe ou celle indirecte. La méthode directe discrétise le contrôle et l'état pour transformer le problème en un problème d'optimisation non linéaire en dimension finie. Quant é la méthode indirecte, elle s'appuie sur le principe de maximum de Pontryagin pour obtenir un problème é valeur limite é résoudre numériquement. Toutes ces méthode, surtout la méthode indirecte, sont très sensibles é la condition initiale. Cette sensibilité extréme constitue le problème majeur de ces méthodes, et il est donc très capital d'y trouver un reméde.

Deuxième partie

contrôle optimal en dimension infinie

3

Rappels sur l'analyse fonctionnelle

Dans ce chapitre, nous allons présenter un rappel sur les espaces fondamentaux en analyse fonctionnelle qui contient quelques notions essentielles qui concernent les espaces $\mathbf{L}^p$, les espaces de Hilbert et de Sobolev qui sont nécessaires de connaître pour aborder la suite de ce mémoire.

3.1 Espaces normés et espaces de Banach.

Définition 3.1.1 *Soit E un espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$. *Une norme sur E est une application de E dans* $\mathbb{R}^+$, *notée* $x \longmapsto \|x\|$, *vérifiant les propriétés suivantes :*

(1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
(2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \quad \forall x \in E; \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E$ (*l'inégalité triangulaire*).

Un espace vectoriel sur lequel une norme a été spécifiée est appelé espace vectoriel normé. une application $x \mapsto \|x\|$ de dans $\mathbb{R}^+$ vérifiant les propriétés **(2)** et **(3)**, mais pas nécessairement la propriété **(1)**, est appelée une semi-norme sur E.

Définition 3.1.2 *Soit* $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite dans un espace normé* $(V, \|.\|)$.
On dit que cette suite est de Cauchy si :

$$\lim_{n,m\to+\infty} \|u_n - u_m\| = 0$$

L'espace normé $(V, \|.\|)$ *est dit de Banach si toute suite de Cauchy dans V converge vers un élément de V (pour la norme* $(\|.\|)$. *En d'autres termes, un espace de Banach est un espace normé complet.*

3.2 Espaces de Hilbert

Nous nous limitons au cas des espaces de Hilbert réels et on considère donc H un **R**-e.v.

Définition 3.2.1 *On appelle produit scalaire sur H, toute application $b : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :*

- *bilinéarité* : $\forall x, y, z \in H, \alpha, \beta, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$,
$b(\alpha x + \beta y, z) = \alpha b(x, z) + \beta b(y, z) \quad et \quad b(x, \lambda y + \mu z) = \lambda b(x, y) + \mu b(x, z)$

- *symétrie* : $\forall x, y \in H, b(x, y) = b(y, x)$

- *positivité stricte* : $\forall x \in H, b(x, x) \geq 0; b(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0_H$

On note habituellement $b(x, y) = (x|y)_H$ un produit scalaire sur H

Définition 3.2.2 *Si l'espace vectoriel H est muni d'un produit scalaire, on dit que c'est un espace préhilbertien.*

Dans toute la suite, on suppose H muni d'un produit scalaire $(.|.)_H$.

Théorème 3.2.1 *L'application $x \mapsto \|x\|_H = \sqrt{(x, x)_H}$ est une norme sur H.*

Théorème 3.2.2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Soit H un R-e.v. muni d'un produit scalaire $(.|.)_H$. Alors, $\forall x, y \in H, |(x, y)_H| \leq \|x\|_H \|y\|_H$*

Définition 3.2.3 *On dit que l'espace pré-hilbertien $(H, \|.\|_H)$ est un espace de Hilbert s'il est complet pour la norme $\|.\|_H$, c'est-à-dire si toute suite de Cauchy dans $(H, \|.\|_H)$ converge dans H.*

Notons dx la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 3.2.4 *Soit un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue. Muni du produit scalaire*

$$(f|g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)g(x)dx$$

l'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert. La norme correspondante se définit

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^2 dx \right)^{1/2}$$

Rappelons au passage que l'espace $L^2(\Omega)$ n'est en fait que l'espace des classes de fonctions de carré intégrable pour la relation d'égalité presque partout.
On rappelle aussi que, H étant un espace de Hilbert, on appelle :
■ dual algébrique de H, et on note H^*, l'espace des formes linéaires sur H ;
■ dual topologique de H, et on note H', l'espace des formes linéaires continues sur H ; pour $f \in H'$, on note encore

$$|f(x)| = |\langle f, x \rangle_{H'H}| = |\langle f, x \rangle|;$$

considérant alors, $\forall f \in H'$,

$$\|f\|_{H'} = \sup_{x \in H, x \neq 0} \frac{|\langle f, x \rangle|}{\|x\|_H} = \sup_{\|x\|_H = 1} |\langle f, x \rangle|.$$

3.3 Topologie Faible

Définition 3.3.1 *On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de H espace de Hilbert converge faiblement vers $x \in H$ et on note $x_n \rightharpoonup x$ si*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\langle x_n, y\rangle_H = \langle x, y\rangle_H \quad \forall y \in H$$

.

Il est aisé de monter (à l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz) que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fortement vers x dans H, alors elle converge faiblement. La réciproque est fausse bien sûr.
Les théorèmes qui suivent fournissent des critères de fermeture/compacité assez simples. Il est à noter que les fermés faibles sont des fermés forts, mais la réciproque est fausse a priori. Par exemple, la sphère unité n'est pas faiblement fermée en dimension infinie, son adhérence pour la topologie faible étant la boule fermée. En revanche, les convexes fortement fermés sont faiblement fermés.

Théorème 3.3.1 (fermeture faible/compacité) *Soit K un sous-ensemble convexe fermé non-vide de l'espace de Hilbert H. Alors, K est fermé pour la topologie faible, autrement dit si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de K convergeant faiblement vers x dans H, alors $x \in K$. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de H, alors on peut en extraire une sous-suite faiblement convergente dans H.*

Remarque 3.3.1 *Il est souvent utile d'utiliser le résultat suivant : si $\varphi : H \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe et s.c.i. pour la topologie forte, alors φ est également s.c.i. pour la topologie faible. Par exemple, il est clair que l'application $H \ni x \longmapsto \|x\|$ est continue pour la topologie forte, donc en particulier s.c.i. pour cette topologie. On en déduit qu'elle est également s.c.i. pour la topologie faiblement autrement dit, si $x_n \longrightarrow x$ dans H, alors*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty}\inf\|x_n\| \geq \|x\|$$

Théorème 3.3.2 (représentation de Riesz)) *Soit H un espace de Hilbert. Pour tout $f \in H'$, il existe un unique $x_f \in H$ tel que :*

$$\forall x \in H, f(x) = \langle f, x\rangle = (x_f|x)_H$$

De plus, $\|f\|'_H = \|x_f\|_H$.

Théorème 3.3.3 (Stampacchia) *On considère, sur l'espace de Hilbert H, la forme bilinéaire*

$$\begin{aligned} a : H \times H &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u, v) &\longmapsto a(u, v) \end{aligned}$$

vérifiant les propriétés suivantes :
continuité :

$$\exists M > 0 : |a(u, v)| \leq M.\|u\|_H.\|v\|_H, \forall u, v \in H;$$

coercivité :

$$\exists \alpha > 0 : a(u, u) \geq \alpha.\|u\|^2_H, \forall u \in H.$$

Alors, $K \subset H$ étant convexe, fermé et non vide, il vient que :

$$\forall f \in H', \exists! u \in K : a(u, v - u) \geq \langle f, v - u\rangle, \forall v \in K.$$

Il en découle le corollaire suivant.

Corollaire 3.3.1 (Lax-Milgram) *Pour tout $f \in H'$, il existe un unique $u \in H$ tel que :*

$$a(u,v) = \langle f, v \rangle, \forall v \in H.$$

Définition 3.3.2 (Semi-continuité) *Une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un espace topologique X est dite semi-continue inférieurement (s.c.i) en x_0 si :*
Pour tout réel $r < f(x_0)$ il existe un voisinage V de x_0 tel que $r < f(x)$ pour tout $x \in V$.
La fonction f est dite semi-continue inférieurement sur une partie C de X si f est semi-continue inférieurement en tout point de C.
Une fonction f est semi-continue supérieurement en x_0 si $-f$ est semi-continue inférieurement en x_0 et elle est dite continue en x_0 si elle est semi-continue inférieurement et semi-continue supérieurement en x_0.

Proposition 3.3.1 *Pour une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un espace topologique X, les propriétés suivantes*
sont équivalentes :
1. *f est semi-continue inférieurement ;*
2. *L'épigraphe de f est fermé ;*
3. *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$; l'ensemble niveau $lev_f(\alpha)$ est fermé.*

Définition 3.3.3 *Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un espace topologique X. La limite inférieure de f en x_0 est défini par :*

$$\liminf_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \sup_{V \in \nu(x_0)} \{\inf\{f(x) : \quad x \in V \setminus \{x_0\}\}\} \in (\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\})$$

Proposition 3.3.2 ([16]) *Une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un espace topologique X est semi-continue inférieurement en x_0 si, et seulement, si*

$$f(x_0) \leq \liminf_{x \longrightarrow x_0} f(x).$$

Si X est un espace métrique, f est semi-continue inférieurement (respectivement semi-continue supérieurement.) en x_0 si, et seulement, si pour toute suite (x_n) convergeant vers x_0 on a :

$$f(x_0) \leq \liminf_{n \longrightarrow +\infty} f(x_n) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \inf_{k \geq n} f(x_k) (resp. f(x_0) \geq \limsup_{n \to +\infty} f(x_n)).$$

Définition 3.3.4 *Soit X un espace de Banach. Une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite faiblement semi-continue inférieurement (semi-continue inférieurement faible) en un point $x_0 \in X$ si pour toute suite (x_n) convergeant faiblement vers x_0, on a :*

$$f(x_0) \leq \liminf_{n \to +\infty} f(x_n).$$

Proposition 3.3.3 ([16]) *Toute fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe et semi-continue inférieurement (pour la topologie forte) est faiblement semi-continue inférieurement.*

3.4 Distributions

3.4.1 L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$

Dans toute la suite, Ω désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$

Définition 3.4.1 *On note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace vectoriel des fonctions définies sur Ω, à valeurs réelles, qui sont de classe C^∞ sur Ω et à support compact inclus dans Ω. Ces fonctions sont souvent appelées "fonctions-tests".*

Définition 3.4.2 *On dit qu'une suite $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ converge vers une fonction φ de $\mathcal{D}(\Omega)$ si :*
1. *Il existe un compact fixe K de Ω contenant le support de toutes les fonctions φ_p et le support de φ ;*
2. *Sur ce compact K, chacune des suites de dérivées $(D^\alpha\varphi_p)(\alpha \in \mathbb{N}^n$ étant un multi-indice quelconque de dérivation) converge uniformément vers $(D^\alpha\varphi)$; en d'autres termes, on a pour tout α :*

$$\lim_{p\to+\infty} \sup_{x\in K} |D^\alpha\varphi_p(x) - D^\alpha\varphi(x)| = 0$$

Remarque 3.4.1 *Les fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$ sont a fortiori dans tous les espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$, pour tout p tel que $1 \le p \le +\infty$. Par ailleurs, la convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$ entraine la convergence dans tous les espaces $L^p(\Omega)$.*

Lemme 3.4.1 *Pour tout p tel que $1 \le p < +\infty$, l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.*

Lemme 3.4.2 *Soit f une fonction de $L^1_{loc}(\Omega)$ telle que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on ait :*

$$\int_\Omega (f\varphi)(x)dx = 0.$$

Alors, f est nulle presque partout sur Ω.

3.4.2 L'espace $\mathcal{D}'(\Omega)$ des distributions sur Ω

Définition 3.4.3 *Soit T une application linéaire définie sur $\mathcal{D}(\Omega)$ et à valeurs réelles. On dit que T est une distribution sur Ω si T est "sequentiellement continue", c'est à dire, si pour toute suite $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ convergeant vers φ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, on a :*

$$\lim_{p\to+\infty} T(\varphi_p) \longrightarrow T(\varphi)$$

On note $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace vectoriel des distributions sur Ω. Dans la suite, on utilisera la notation $T(\varphi)$ ou $\langle T, \varphi\rangle$.

Remarque 3.4.2 *La forme T étant linéaire, il suffit, pour établir que T est une distribution, de montrer que pour toute suite $(\varphi_p)_{p\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ convergeant vers l'application nulle, on a :*

$$T(\varphi_p) \longrightarrow 0.$$

3.4.3 Dérivation des distributions

Considérons d'abord le cas d'une fonction f de classe C^1 sur Ω, Ω étant un ouvert borne de frontière lipschitzienne. Soit φ une fonction test de $\mathcal{D}(\Omega)$; grâce à la formule de Green, on a, pour chaque indice $i \in \{1, ..., n\}$:

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\varphi\right)(x)dx = -\int_\Omega \left(f\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right)(x)dx.$$

puisque φ est nulle sur $\partial\Omega$. Comme f et $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont localement intégrables sur Ω, ce sont des distributions, de sorte que l'égalité ci-dessus peut s'interpréter au sens des distributions de la manière suivante :

$$\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \rangle = -\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \rangle.$$

On va généraliser cette écriture à toutes les distributions et également aux dérivées de tout ordre.

Définition 3.4.4 *Soit T une distribution sur Ω et $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice quelconque de dérivation. On appelle dérivée αime de T, la distribution, notée $D^\alpha T$, définie par :*

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

avec : $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.

Remarque 3.4.3 *Cette nouvelle notion de dérivation n'est qu'une généralisation de la notion de dérivation usuelle pour les fonctions. En d'autre termes, si une fonction est dérivable au sens classique, est-ce que sa dérivée au sens des distributions coïncide avec cette dérivée usuelle ? La réponse utilise essentiellement la formule de Green ; celle-ci permet en effet de vérifier le résultat suivant :*

Lemme 3.4.3 *Soit f une fonction de classe $C^1(\Omega)$. Alors, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ de f coïncide avec la dérivée α n-ième de la distribution T_f , ou le multi-indice de dérivation $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ est définie par $\alpha_i = 1$ et $\alpha_j = 0$ pour $i \neq j$.*

Remarque 3.4.4 *Si une fonction est dérivable presque partout, cette dérivée ne coïncide pas nécessairement avec sa dérivée au sens de distributions.*

3.4.4 Convergence des distributions

Définition 3.4.5 *Soient T_p, pour $p \in \mathbb{N}$, et T des distributions sur Ω. On dit que la suite $(T_p)_{p\in\mathbb{N}}$converge vers T dans $\mathcal{D}\prime(\Omega)$ si pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a*

$$\lim_{p \to +\infty} \langle T_p, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle.$$

On en déduit le résultat suivant :

Lemme 3.4.4 *La dérivation des distributions est une application linéaire continue dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Remarque 3.4.5 *L'application qui à $f \in L^2(\Omega)$ associe la distribution T_f est continue, de sorte que l'application de $L^2(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ est une injection linéaire continue, sans réciproque pour la convergence.*

Plus précisément nous avons le résultat suivant :

Proposition 3.4.1 ([2]) *Soit $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^2(\Omega)$ convergeant vers f dans $L^2(\Omega)$. Alors la suite $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ multi-indice de dérivation, la suite $(D^\alpha f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ converge vers $D^\alpha f$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

3.5 Espaces de Sobolev

Définition 3.5.1 *On note $H^1(\Omega)$ l'espace des fonctions mesurables de carré intégrable dont chacune des dérivées partielles premières (au sens des distributions) est de carré intégrable, c'est à dire :*

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) / \forall i \in \{1; ....; n\}; \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega) \right\}.$$

On munit cet espace du produit scalaire suivant :

$$(u,v)_{H^1(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{[L^2(\Omega)]^n}$$

La norme correspondante est :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \sqrt{(u,u)_{H^1(\Omega)}} = \sqrt{\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial u}{\partial x_i}\|^2_{L^2(\Omega)}}.$$

On a le resultat suivant :

Théorème 3.5.1 ([2]) *L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert.*

Remarque 3.5.1 *On a les propriétés suivantes :*
1. *Si Ω est borné, alors $C^1(\overline{\Omega}) \subset H^1(\Omega)$.*
2. *L'espace $H^1(\Omega)$ est strictement inclus dans l'espace $L^2(\Omega)$.*
3. *L'espace $D(\Omega)$ est un sous-espace de $H^1(\Omega)$.*

On peut généraliser la définition précédente en faisant intervenir des dérivées d'ordre supérieur. De manière générale, on a :

Proposition 3.5.1 ([2]) *Soit m un entier positif. L'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ défini par :*

$$H^m(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) : D^\alpha v \in L^2(\Omega), \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m \right\}.$$

est un espace de Hilbert pour le produit scalaire suivant

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

La norme associée est :

$$\|v\|_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On peut utiliser la notation $\|.\|_{m,\Omega}$ ou tout simplement $\|.\|_m$ quand il n'y a pas d'ambigüité sur l'ouvert. On fera aussi parfois intervenir la semi-norme $|.|_{m,\Omega}$ définie par :

$$|v|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| = m} \|D^\alpha v\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

D'autre part, il est possible de généraliser ces définitions dans un cadre autre que celui de Hilbert. On a alors :

Proposition 3.5.2 *Soit m un entier positif et $p \in [1, +\infty]$. L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ défini par :*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v \in L^p(\Omega) : D^\alpha v \in L^p(\Omega), \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m\}$$

est un espace de Banach pour la norme

$$\|v\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{L^p}^p \right)^{1/p} \quad (p < \infty), \quad \|v\|_{W^{m,\infty}} = \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{L^\infty}.$$

3.5.1 L'espace $H_0^1(\Omega)$

Définition 3.5.2 *On appelle $H_0^1(\Omega)$ la fermeture de $D(\Omega)$ dans l'espace $H^1(\Omega)$ muni de la norme $\|.\|_{H^1(\Omega)}$; en d'autres termes*

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega), \exists (v_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega) \quad \textit{telle que } \lim_{n \to +\infty} \|v_n - v\|_{H^1(\Omega)} = 0 \right\}.$$

Cet espace est un sous-espace fermé de l'espace $H^1(\Omega)$. C'est donc un espace de Hilbert pour le produit scalaire $(.,.)_{H^1(\Omega)}$. En effet, si l'ouvert Ω est borné, on peut définir un autre produit scalaire plus simple sur cet espace, c'est une conséquence du résultat suivant.

Théorème 3.5.2 (Inégalité de Poincaré [2] page 90) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Alors il existe une constante positive $C(\Omega)$ telle que*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega), \int_\Omega |v|^2 dx \leq C(\Omega) \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx.$$

Corollaire 3.5.1 ([2] page 91) *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné dans au moins une direction de l'espace. Alors la semi-norme*

$$|v|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme usuelle induite par celle de $H^1(\Omega)$.

Remarque 3.5.2 ***1.*** *Si Ω est borné, on remarque que l'espace $H_0^1(\Omega)$ est strictement inclus dans $H^1(\Omega)$. En effet, la fonction définie par $v(x) = 1$ pour tout $x \in \Omega$ est clairement dans $H^1(\Omega)$; en revanche, elle ne peut être dans $H_0^1(\Omega)$, car elle ne vérifie pas l'inégalité de Poincaré (puisque $|v|_{1,\Omega} = 0$).*
2. *Si Ω est borné, l'inégalité de Poincaré est fausse dans l'espace $H^1(\Omega)$.*
3. *Si Ω est borné, l'espace $H_0^1(\Omega)$ peut aussi être défini comme étant le complété de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la semi-norme $|v|_{1,\Omega}$.*

Une conséquence importante de cette inégalité est donnée par le corollaire suivant :

Corollaire 3.5.2 ([2]) *Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert borné, alors la semi-norme $|v|_{1,\Omega}$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme induite par celle de $H^1(\Omega)$. L'espace $H_0^1(\Omega)$ est alors un espace de Hilbert pour le produit scalaire défini par*

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} = (\nabla u, \nabla v)_{[L^2(\Omega)]^n}$$

Proposition 3.5.3 ([2]) *On désigne par $H_0^m(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans l'espace $H^m(\Omega)$ pour la norme $\|.\|_{H^m(\Omega)}$. Sur cet espace, si Ω est borné, la semi-norme $|.|_{H_0^m(\Omega)}$ est une norme équivalente à la norme induite par l'espace $H^m(\Omega)$, et l'espace $H_0^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert pour cette norme.*

Lemme 3.5.1 ([2]) *L'espace $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans l'espace $H^m(\mathbb{R}^n)$, en d'autre terme, on a :*

$$H_0^m(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n).$$

Lemme 3.5.2 ([2]) *On suppose que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ de frontière lipschitzienne. L'espace $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^m(\Omega)$.*

Remarque 3.5.3 *Dans le cas de l'espace tout entier, bien que l'on ait $H_0^1(\mathbb{R}^n) = H^1(\mathbb{R}^n)$, l'inégalité de Poincaré n'est pas valable et la semi-norme $|.|_{1,\mathbb{R}^n}$ est une norme sur $H^1(\mathbb{R}^n)$, non équivalente à la norme usuelle.*

3.5.2 Trace et formule de Green

Lors de la résolution des équations aux dérivées partielles, il nous faudra introduire des conditions aux limites, ce qui nous amène à parler de la restriction à la frontière $\Gamma = \partial\Omega$ d'une fonction de $H^1(\Omega)$. Une fonction $v \in H^1(\Omega)$ n'est pas nécessairement continue, et définir sa trace $v_{|\Gamma}$ (c'est à dire sa valeur) sur le bord $\Gamma = \partial\Omega$ pose un problème. On a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^n)$ Pour définir leur valeur au bord on va les approcher par des fonctions régulières.
On admet que les fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ sont dense dans $H^1(\mathbb{R}^n)$. D'autre part, si Ω est un ouvert de classe C^1 par morceaux,(c'est à dire que localement sa frontière est le graphe d'une fonction C^1alors $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Omega)$. Nous allons montrer que le fait d'associer une valeur au bord pour une fonction $H^1(\Omega)$est une opération continue pour la topologie de $H^1(\Omega)$. Plus précisément, nous avons le théorème suivant :

Théorème 3.5.3 (Théorème de trace) *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$), de frontière Γ de classe C^1 par morceaux. Alors :*
1.$\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ *est dense dans $H^1(\Omega)$.*
2. *l'application restriction γ_0 définie par :*

$$\gamma_0 : \begin{cases} \mathcal{D}(\overline{\Omega} \longrightarrow C^0(\Gamma) \\ \\ v \longrightarrow \gamma_0(v) = v_{|\Gamma} \end{cases}$$

est linéaire continue (pour $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$) muni de la norme $\|.\|_{H^1(\Omega)}$ et $C^0(\Gamma)$ muni de la norme $\|.\|_{L^2(\Gamma)}$ et se prolonge par continuité de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$: On définit ainsi

$$\gamma_0 : \begin{cases} H^1\Omega \longrightarrow L^2(\Gamma) \\ \\ v \longrightarrow \gamma_0(v) = v_{|\Gamma} \end{cases}$$

Théorème 3.5.4 (Formule de Green [2] page 93) *Soit Ω un ouvert borné régulier de classe C^1. Si u et v sont des fonctions de $H^1(\Omega)$, elles vérifient :*

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega v(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)dx + \int_{\partial\Omega} u(x)v(x)n_i(x)ds;$$

où $n = (n_i)_{1\le i\le N}$ est la normale unité extérieure à $\partial\Omega$.

3.5.3 Espace trace $H^{1/2}(\Gamma)$ et $H^{-1/2}(\Gamma)$

On suppose ici que la frontière $\Gamma = \partial\Omega$ et regularité $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
Normalement on peut définir en presque partout en tout point x de Γ une normale

$$n : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^N; \quad x \longmapsto n(x) \quad avec \quad n \in L^\infty(\Gamma).$$

S'il en est ainsi on définit la mesure superficielle de Γ sur Γ (on procède par carte locale).
On pose donc

$$L^2(\Gamma) = \{\varphi : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}, \quad mesurable \quad et \quad \int_\Gamma \varphi^2(x) d\Gamma < +\infty\}$$

muni de la norme naturelle

$$\|\varphi\|_{L^2(\Gamma)} = \left(\int_\Gamma |\varphi(x)|^2 d\Gamma\right)^{1/2}.$$

On montre alors (c'est très technique) que si $\varphi \in H^1(\Omega)$ on peut donner un sens $\varphi_{|\Gamma} \in L^2(\Gamma)$.
On definit ainsi un opérateur

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Gamma); \quad \varphi \longmapsto \gamma_0(\varphi) = \varphi_{|\Gamma}$$

appelé opérateur trace.
Proposition Soit Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^N$ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.
L'application γ_0 est linéaire continue de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma)$, $\exists \quad C > 0 \quad \|\varphi\|_{L^2(\Gamma)} \leq C\|\varphi\|_{H^1(\Omega)}$.
L'application γ_0 n'est pas surjective. On pose $H^{1/2}(\Gamma) = \gamma_0(H^1(\Omega))$ qui est un sous espace vectoriel propre de $L^2(\Gamma)$ que l'on peur munir de la norme "plus fine" que celle induite de $L^2(\Gamma)$.
L'injection canonique $H^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma)$ est continue, dense dans $L^2(\Gamma)$.

$$H_0^1(\Omega) = ker\gamma_0 = \{\varphi \in H^1(\Omega); \quad \varphi_{|\Gamma} = 0\}.$$

Toujours pour Γ de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, pour $\varphi \in H^2(\Omega)$. On peut definir $\nabla\varphi.n$ sur Γ où n= normal extérieur à Ω. Pour φ régulière, la dérivée normale sur Γ est

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} = \nabla\varphi.n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}.n_i(x) = \lim_{t\longrightarrow 0} \frac{\varphi(x+tn)-\varphi(x)}{t}.$$

On montre (c'est très technique) que $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta} \in \left(H^{1/2}(\Gamma)\right)' =^{pose} H^{-1/2}(\Gamma)$ que l'on munit de la normale dual.

On définit ainsi une application

$$\gamma_1 : H^2(\Omega) \longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma); \quad \varphi \longmapsto \gamma_1(\varphi) = \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}$$

Proposition 3.5.4 *Soit Ω un ouvert borné, régulier de classe $\mathcal{C}^1$ L'application γ_1 est linéaire continue de $H^2(\Omega)$ dans $H^{-1/2}(\Gamma)$*

4

Problème de contrôle Optimal en dimension infinie

4.1 Minimisation Fonctionnelle

4.1.1 Formulation et position du problème de contrôle optimal

Equation d'état

Soient $(H;\|.\|_H)$ et $(V;\|.\|_V)$ deux espaces de Hilbert tels que $V \hookrightarrow H$ continûment et densément.
On identifie H à son dual H' de sorte que si V' est le dual de V, alors $V \hookrightarrow H = H' \hookrightarrow V'$.

Exemple : $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) = \left(L^2(\Omega)\right)' \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$.

On note $\langle . \rangle_{V',V}$ et $\langle . \rangle_H$ les produits scalaires associés.

On considère maintenant un système dont l'état y est gouverné par une équation de la forme

$$\begin{cases} y \in V \\ Ay = f \end{cases} \tag{4.1}$$

où

* y est l'inconnue à déterminer ;
* $A \in \mathcal{L}(V, V')$ est le modéle mathématique supposé connu (A est un opérateur aux dérivées partielles) ;
* $f \in V'$ est donnée (terme source).

Remarque 4.1.1 *Dans les applications H et V sont des espaces de fonctions définies sur un ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}^N \quad N \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 4.1.1 $H = L^2(\Omega)$ *et* $V = H_0^1(\Omega)$.

Définition

On dit que le problème (4.1) est bien posé si les trois conditions suivantes sont réalisées :

1. existence de y ;
2. unicité de y ;
3. stabilité au sens où $f \longmapsto y(f)$ est continue de V' dans V.

Exemple : si A est un isomorphisme continue de V dans V', alors le problème (4.1) est bien posé.

Ensemble de contrôles

On se donne :

* $\mathcal{U}$: espace de Hilbert de contrôle muni $\langle , \rangle_{\mathcal{U}}$;
* $B \in \mathcal{L}(\mathcal{U}, V')$ un opérateur qui permet d'agir sur le second membre ;
* $f \in V'$.

Pour tout $v \in \mathcal{U}$, le problème

$$\begin{cases} y \in V \\ Ay = f + Bv \end{cases} \tag{4.2}$$

admet *une solution unique* y (car le problème est supposé bien posé) ; on notera $y = y(f, v)$.

Ensembles d'observations

On suppose que l'on peut observer l'état $y(f, v)$ du système. On se donne :

* $\mathcal{H}$: espace de Hilbert des observations $\langle , \rangle_{\mathcal{H}}$;
* $\mathcal{C} \in \mathcal{L}(V, \mathcal{H})$ qui permet d'observer $y(, v)$

Donc $z(v) = \mathcal{C}(y(f, v))$.

Fonction contrôle

A toute observation $z(v)$ et donc à tout contrôle v, on associe un contrôle (ou fonction objectif) J définie par :

$$J : \begin{cases} \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R} \\ v \longmapsto \Phi(z(v), v) \end{cases} \tag{4.3}$$

où Φ est définie sur $\mathcal{H} \times \mathcal{U}$.

Problème de contrôle

Dans la pratique, les contrôles sont soumis à des contraintes.
On pose $\mathcal{U}_{ad}$ un convexe fermé de $\mathcal{U}$

Problème 1 : trouver u tel que

$$\begin{cases} u \in \mathcal{U}_{ad} \\ J(u) = \min\limits_{v \in \mathcal{U}_{\text{ad}}} J(v) \end{cases} \tag{4.4}$$

On dit que u est un contrôle optimal pour (4.2), (4.3) et (4.4).

Problème 2 : unicité du contrôle optimal ; sinon la structure de l'ensemble des contrôles optimaux.

Problème 3 : calcul du contrôle optimal (caractérisation du contrôle optimal ; système d'optimalité).

Problème modèle : contrôle de la température

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ qui représente un corps thermiquement conducteur.

— État du système : champ y des températures dans Ω.
— Température maintenue constante sur le bord : condition de Dirichlet homogène
— On impose une source de chaleur sur laquelle aucune action n'est possible : f

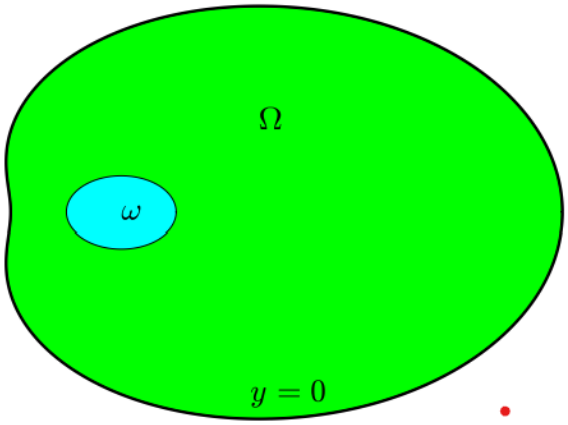


FIGURE 4.1 – domaine Omega

— Contrôle $v\chi_\omega$: représente une source de chaleur sur un sous-domaine ω afin d'agir sur la température dans tout le domaine Ω.

La fonction $y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ solution de l'équation de la chaleur stationnaire

$$\begin{cases} -\Delta y(x) = f(x) + v(x)\chi_\omega(x) & x \in \Omega \\ y(x) = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{4.5}$$

Le problème de contrôle optimal :

$$\inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v) \quad (\mathcal{P})$$

où $\mathcal{U}_{ad}$ sous-espace convexe fermé de $L^2(\Omega)$ et

$$J(v) = \frac{1}{2}\|y - z_d\|^2 + \frac{\alpha}{2}\|v\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$z_d \in L^2(\Omega)$ et y dépend implicitement de v et résout léquation

— Comment calculer la différentielle de J?
— Comment écrire des conditions d'optimalité pour ce problème?
— Quelle méthode numérique en déduire?

4.2 Minimisation fonctionnelle (Problème 1)

4.2.1 Fonctions convexes/fortement convexes

Soit H un espace de Hilbert muni de la norme $\|.\|$ et du produit scalaire $\langle .,. \rangle$.

Définition 4.2.1 *Une fonction $J : H \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe si*

$$\forall u, v \in H, \quad \forall \theta \in [0,1], \quad J(\theta u + (1-\theta)v) \leq \theta J(u) + (1-\theta)J(v)$$

$$\forall u \neq v \in H, \quad \forall \theta \in]0,1[, \quad J(\theta u + (1-\theta)v) < \theta J(u) + (1-\theta)J(v).$$

et strictement convexe si

Proposition 4.2.1 *Soit $J : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Alors*

1. *J est convexe si et seulement si :*

$$J(v) \geq J(u) + \langle \nabla J(u), v - u \rangle \quad \forall u, v \in H$$

2. *J est strictement convexe si et seulement si :*

$$J(v) > J(u) + \langle \nabla J(u), v - u \rangle \quad \forall u \neq v \in H$$

Définition 4.2.2 (Fonctions fortement convexes) *Une fonction $J : H \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite fortement convexe ou α-convexe s'il existe $\alpha > 0$ tel que*

$$J(\theta u + (1-\theta)v) \leq \theta J(u) + (1-\theta)J(v) - \frac{\alpha}{2}\theta(1-\theta)\|v-u\|^2 \quad \forall u, v \in H$$

Remarque 4.2.1 *J fortement convexe $\Longrightarrow$ J strictement convexe (pourquoi ?)*

Proposition 4.2.2 (fonctions fortement convexes différentiables) *Soit $J : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *J est fortement convexe*
2. *La fonction $J - \frac{\alpha}{2}\|.\|^2$ est convexe*
3. *J est α-elliptique, autrement dit*

$$\langle \nabla J(u) - \nabla J(v), u - v \rangle \geq \alpha \|v-u\|^2 \quad \forall u, v \in H.$$

Soit $\mathcal{U}_{ad}$ un sous-ensemble convexe fermé de H

Théorème 4.2.1 (existence d'un minimum de fonction α-convexe) *Soient $J : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, α-convexe et $\mathcal{U}_{ad}$ une partie non-vide convexe fermée. Alors le problème*

$$\inf\{J(v), \quad v \in \mathcal{U}_{ad}\}$$

admet une unique solution.

Théorème 4.2.2 *Supposons que $J : H \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction différentiable et convexe. Alors $u \in U_{ad}$ est solution du problème*

$$\inf\{J(v), \quad v \in U_{ad}\}$$

si et seulement s'il satisfait l'inéquation d'Euler

$$\langle \nabla J(u), v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

Dans le cas $\mathcal{U}_{ad} = H$ l'inéquation d'Euler

$$\langle \nabla J(u), v - u \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$$

se réécrit $\nabla J(u) = 0$.

Proposition 4.2.3 *Soit K, un compact d'un espace de Hilbert H pour la topologie faible. Soit*

$$J : K \longrightarrow \mathbb{R}$$

une application s.c.i. pour la topologie faible. alors le problème

$$\inf_{x \in K} J(x)$$

possède une solution.

Preuve 1 *Proposition Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite minimisante d'éléments de K. Par compacité de K, il existe une suite extraite $(x_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge faiblement vers un élément $x \in K$. En utilisant le fait que J est s.c.i. pour cette topologie, on en déduit :*

$$J(x) \leq \lim_{n\longrightarrow+\infty} \inf J(x_{\varphi(n)}) = \inf_K J$$

La conclusion s'ensuit.

Théorème 4.2.3 (méthode variationnelle) *Soit H, un espace de Hilbert, C un convexe fermé non vide de H, et*

$$J : H \longrightarrow \mathbb{R},$$

une application différentiable et convexe. Si C n'est pas borné, on suppose J coercive, autrement dit $J(x) \longrightarrow +\infty$ si $\|x\| \longrightarrow +\infty$ Alors il existe $x^* \in C$ tel que $J(x^*) = \inf_{x\in C} J(x)$.

Preuve 2 *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite minimisante d'éléments de C. Elle est bornée : c'est immédiat si C est borné. Sinon, une sous-suite non bornée admettrait une sous-suite de normes tendant vers $+\infty$; par coercivité ses valeurs tendraient vers $+\infty$, contrairement au caractère minimisant. D'après le théorème sur la fermeture faible/compacité, C est faiblement fermé et quitte à extraire, il existe $x^* \in C$ tel que $x_n \longmapsto x^*$. Enfin, puisque J est convexe et différentiable, sa courbe est située au dessus de tout hyperplan tangent, et il vient :*

$$J(x_n) \geq J(x^*) + \langle \nabla J(x^*), x_n - x^* \rangle_H \longrightarrow J(x^*)$$

et ainsi $\inf_C J = J(x^*)$ nécessairement.

Théorème 4.2.4 (Théorème fondamental) *Soit $J : \mathcal{U}_{ad} \subset \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonctionnelle telle que :*

1. *J est propre : $\exists v_0 \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que $J(v_0) \neq +\infty$;*
2. *J est coercive : $J(v) \to +\infty$ lorsque $\|v\| \mapsto +\infty$; c'est-à-dire :*

$$\forall v \in \mathcal{U}_{ad},\ \|v\|_{\mathcal{U}} \to +\infty \implies \lim J(v) = +\infty$$

3. *J est s.c.i. faible de $\mathcal{U}$ dans $\mathbb{R}$.*

Alors il existe $u \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que $J(u) \leq J(v)$; $\forall v \in \mathcal{U}_{ad}$.

Preuve 3 *La preuve en trois étapes*

Etape 1 : *J est minorée sur $\mathcal{U}_{ad}$*

De la coercivité de J : $\exists A > 0$ tel que $\forall v \in \mathcal{U}_{ad},\ \|v\|_{\mathcal{U}} > A \implies J(v) > J(v_0)$

On distingue deux cas de figure :

- *$v \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que $\|v\|_{\mathcal{U}} > A$ (1)*
- *$v \in \mathcal{U}_{ad}$ tel que $\|v\|_{\mathcal{U}} \leq A$ (2)*
- *Si (1), alors $J(v) > J(v_0)$.*
- *Si (2), alors montrons qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $J(v) \geq k$.*
  Sinon $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists v_n \in \mathcal{U}_{ad}$, $\|v_n\|_{\mathcal{U}} \leq A$, avec $J(v_n) \leq -n$.
  - *$\|v_n\| \leq A \implies (v_n)$ est bornée dans $\mathcal{U}$ (Hilbert) ; donc il existe $v^* \in \mathcal{U}$ et (v_n) telle que $v_n \longrightarrow v^*$ dans $\mathcal{U}$ faible.*
  - *$\mathcal{U}_{ad}$ fermé dans $\mathcal{U}$ et $\mathcal{U}_{ad}$ convexe, alors $\mathcal{U}_{ad}$ fermé faible dans $\mathcal{U}$.*

- $v_{nk} \in \mathcal{U}_{ad}$, *alors* $v^* \in \mathcal{U}_{ad}$.
  Enfin s.c.i $\Longrightarrow \underline{\lim} J(v_{nk}) \geq J(v^*)$.

Or $J(v_{nk}) \leq -n_k$ *donc* $\underline{\lim} J(v_{nk}) \leq -\infty$ *et* $J(v^*) \leq -\infty$ *(contraire à la définition de J').*
En résumé, J est minorée sur $\mathcal{U}_{ad}$.
$E_J = \left\{J(v)/v \in \mathcal{U}_{ad}\right\} \subset \mathbb{R}$ *est minorée, et de plus* $E_J \neq \emptyset$.
En conséquence, $\inf E_J$ *est défini sur* $\mathbb{R}$.
On pose $\alpha = \inf E_J = \inf_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v)$.

Etape 2 : *Suite minimisante associée*

Par définition de α, *on a pour tout* $n \in \mathbb{N}^*, \exists (u_n) \subset \mathcal{U}_{ad} \quad t.q \quad \alpha \leq J(u_n) \leq \alpha + \dfrac{1}{n}$

Montrons que (u_n) *est bornée dans* $\mathcal{U}_{ad}$.

Sinon, il existe une sous-suite extraite (u_{nk}) *telle que* $\alpha \leq J(u_{nk}) \leq \alpha + \dfrac{1}{n}$ *et* $\|u_{nk}\| \longmapsto +\infty$
or, d'après la coercivité $\lim J(u_{nk}) \longmapsto_{k \mapsto +\infty} +\infty$
i.e. $\forall \beta > 0, \exists k_\beta \quad t.q \quad \forall k \geq k_\beta, J(u_{nk}) \geq \beta$.
En particulier pour $\beta = \alpha + 1, \exists \quad k_\alpha \quad t.q \quad \forall k > k_\alpha, \quad J(u_{nk}) \geq \alpha + 1$.
En conséquence $\alpha + 1 < J(u_{nk}) < \alpha + \dfrac{1}{n_k}$ *et* $\alpha + 1 < \alpha$ *pour k assez grand, ce qui est absurde ;*
donc (u_n) *est bornée.*
Etape 3 : *la borne* α *est atteinte*
$\Longrightarrow \mathcal{U}$ *Hilbert, donc* $\exists (u_{nk}) \in \mathcal{U}_{ad}$ *et* $u \in \mathcal{U}$ *t.q* $u_{nk} \rightharpoonup u$ *dans* $\mathcal{U}$ *faible.*
$\Longrightarrow \mathcal{U}_{ad}$ *convexe fermé* $\Longrightarrow \mathcal{U}_{ad}$ *fermé faible donc* $u \in \mathcal{U}_{ad}$.
$\Longrightarrow$ *De la s.c.i., on a* $\underline{\lim} J(u_{nk}) \geq J(u)$ *or* $\lim J(u_n) = \alpha$, *donc* $\underline{\lim} J(u_{nk}) = \alpha$.
Ainsi, $\alpha \geq J(u) \Longrightarrow \alpha = J(u)$.

Corollaire 4.2.1 *Soit H, un espace de Hilbert et* $J : H \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonctionnelle convexe, coercive et s.c.i. pour la topologie forte. Alors, J est minorée sur H et le problème* $\inf_H J$ *a une solution*

4.2.2 Structure de l'ensemble des contrôles optimaux

Problème d'unicité

Proposition 1

Soit J : $\mathcal{U}_{\text{ad}} \subset \mathcal{U}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, coercive, s.c.i. faible et convexe alors, l'ensemble C_O des contrôles optimaux de J sur $\mathcal{U}_{\text{ad}}$ est un convexe fermé non vide.

Preuve

C_O est non vide résulte de l'hypothèse sur $\mathcal{U}_{\text{ad}}$ et J.
• Convexité de C_O
Soit u_1 et $u_2 \in C_O$ et $\lambda \in]0;1[$, alors

$$J(\lambda.u_1 + (1-\lambda).u_2) \leq \lambda.J(u_1) + (1-\lambda).J(u_2)$$

Comme u_1 et u_2 sont des éléments de C_O, $J(u_1) = J(u_2)$ et donc $J(\lambda.u_1 + (1-\lambda)u_2) \leq J(u_1) = J(u_2)$
Donc $J(\lambda.u_1 + (1-\lambda).u_2) = J(u_1) \Longrightarrow \lambda.u_1 + (1-\lambda).u_2 \in C_O$

• Fermeture de C_O

Soit $(u_n)_n \subset C_O$ avec $u_n \longrightarrow u$.

∗ Comme $C_O \subset \mathcal{U}_{\text{ad}}$ et $\mathcal{U}_{\text{ad}}$ est fermé, alors $u \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$ www

$$\left|\langle f, u_n - u\rangle_{\mathcal{U}',\mathcal{U}}\right| \leq \|f\|_{\mathcal{U}'}.\|u_n - u\|_{\mathcal{U}} \longrightarrow 0$$

En effet, J s.c.i faible donc ...

La notion de strict convexité donne une réponse au problème d'unicité.

Proposition Soit $J : \mathcal{U}_{\text{ad}} \subset \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$, coercive, s.c.i faible et strictement convexe. Alors l'ensemble $\mathcal{C}$ est réduit à un élément.

Les deux propositions précédentes montrent qu'il est intéressant d'avoir une caractérisation des fonctionnelles convexes ou (strictement convexe).

4.2.3 Caractérisation du contrôle optimal

Théorème 4.2.5 *Soit $J : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable au sens de Gâteaux.*

- *Si J admet un minimum relatif u sur $\mathcal{U}_{ad}$ convexe fermé non vide de $\mathcal{U}$, alors $J'(u).(v-u) \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$.*
- *Si de plus $\mathcal{U}_{ad} = \mathcal{U}$ et si u est un minimum de J sur $\mathcal{U}$, on a l'équation d'Euler $J'(u) = 0$.*

Preuve 4 *Soit $\omega \in \mathcal{U}$, $\omega \neq 0$ tel que $u + t.\omega \in \mathcal{U}_{ad}$ et $t \in]0;1[$; on a*

$$J(u+t\omega) - J(u) \geq 0 \implies \frac{J(u+t\omega) - J(u)}{t} \geq 0$$

donc $J'(u)(\omega) \geq 0$, $\forall \omega \quad t.q \quad (u+t\omega) \in \mathcal{U}_{ad}$.
En particulier pour $v \in \mathcal{U}_{ad}$, on prendra $\omega = v - u$ ce qui implique que $u + tw = (1-t)u + tv \in \mathcal{U}_{ab}$ car convexe, et donc $J'(u)(v-u) \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$.
Maintenant, si $\mathcal{U}_{ad} = \mathcal{U}$, alors pour $v = u \pm \omega$, avec $\omega \in \mathcal{U}$, on a $J'(u)(\omega) \geq 0, \quad \forall \omega \in \mathcal{U}$ et donc $J'(u) = 0$.

4.3 Application

4.3.1 Problème de contrôle

Soit $V \hookrightarrow H = H' \hookrightarrow V'$.
Soit $a(,)$ une forme bilinéaire symétrique sur V.
On suppose que :

$$\left\{ \begin{array}{c} a(,) \quad est \quad continue. \\ \exists M > 0 \quad tq \quad |a(\varphi,\psi)| \leq M\|\varphi\|_V \|\psi\|_V \quad \varphi \quad \psi \in V. \end{array} \right. \tag{4.6}$$

$$\left\{ \begin{array}{c} a(,) \quad est \quad coercive. \\ \exists \alpha > 0 \quad tq \quad a(\varphi,\varphi) \geq \alpha\|\varphi\|_V^2 \quad \varphi \in V. \end{array} \right. . \tag{4.7}$$

Soit aussi $f \in V'$.
On définit sur V la fonctionnelle J par :

$$J(\varphi) = \frac{1}{2}a(\varphi,\varphi) - \langle f, \varphi \rangle_{V,V'}.$$

Soit enfin K un convexe fermé non vide.

Proposition 4.3.1 *Sous les hypothèse (4)-(7), il existe φ^* unique solution du problème de minimisation*

$$\left\{ \begin{array}{c} \varphi^* \in K \\ J(\varphi^*) \leq J(\varphi), \quad \forall \varphi \in K. \end{array} \right. \tag{4.8}$$

Preuve 5 *K étant un convexe fermé non vide de l'espace de Hilbert V, il suffit de montrer que que J est propre, coercive, semi-continue inférieure faible et strictement convexe pour assurer l'existence et l'unicité de φ^*.*
• *J est propre cela résulte de la définition de la forme bilinéaire.*
• *Coercivité :*
On a

$$J(\varphi) \geq \frac{\alpha}{2}\|\varphi\|_V^2 - \|f\|_{V'}\|\varphi\| = \|\varphi\|_V\left(\frac{\alpha}{2}\|\varphi\| - \|f\|_{V'}\right).$$

Par suite

$$\lim_{\|\varphi\|_V \longrightarrow +\infty} J(\varphi) = +\infty$$

• *semi-continue inférieure faible :*
La forme bilinéaire etant symetrique elle dévient un produit scalaire sur V la norme associée etant équivalente à la norme $\|.\|_V$.
On a que

$$v \longmapsto \sqrt{a(v,v)}$$

est une norme équivalente à la $\|.\|_V$ dont le carré est strictement convexe, continue, et $v \longmapsto \langle f, v\rangle$ une application linaire continue. Par conséquent

$$v \longmapsto J(v)$$

est continue et strictement convexe ce qui implique que s.c.i.f.

4.3.2 Système d'optimalité (Stampacchia et Contrôle optimal)

Proposition 4.3.2 *Sous les hypothèses précédentes, l'unique solution φ^* est caractérisée par :*

$$\begin{cases} \varphi^* \in K \\ a(\varphi^*, \varphi - \varphi^*) \geq (f, \varphi - \varphi^*); \quad \forall \varphi \in K. \end{cases} \tag{4.9}$$

Exercice : Montrer que si :

$$\begin{cases} \varphi^* \in K \\ a(\varphi^*, \varphi - \varphi^*) \geq (f, \varphi - \varphi^*); \quad \forall \varphi \in K. \end{cases} \tag{4.10}$$

alors

$$J(\varphi^*) \leq J(\varphi) \quad \forall \varphi \in K \quad et \quad f \in V'.$$

Preuve 6 *: Proposition*
La forme bilinéaire etant symetrique elle dévient un produit scalaire sur V la norme associée etant équivalente à la norme $\|.\|_V$. De plus $f \in V'$ est une forme linéaire continue sur V.
D'après le thórème de representation Riez il existe $\hat{\varphi} \in V$ unique tel que

$$\langle f, \theta\rangle = a(\hat{\varphi}, \theta\rangle) \quad \forall \theta \in V.$$

S'il en ait ainsi la relation

$$a(\varphi^*, \varphi - \varphi^*) \geq a(\hat{\varphi}, \varphi - \varphi^*) \quad \forall \varphi \in K$$

$\Longleftrightarrow$

$$a(\varphi^* - \hat{\varphi}, \varphi - \varphi^*) \geq 0 \quad \forall \varphi \in K$$

ce qui signifie exactement que $\varphi^* = Proj_K\hat{\varphi}$.

4.4 Calcul du contrôle : la méthode de Pénalisation

Soit $J : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ coercive, s.c.i faible et strictement convexe.

* $\mathcal{U}_{\text{ad}} \subset \mathcal{U}$ convexe fermé non vide (i)
* $\psi : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe, s.c.i faible vérifiant

$$\psi(v) \geq 0,\ \forall v \in \mathcal{U} \quad \text{et} \quad \psi(v) = 0 \Leftrightarrow v \in \mathcal{U}_{\text{ad}} \qquad \text{(ii)}$$

$\forall \epsilon > 0$, on introduit la fonctionnelle J_ϵ définie sur $\mathcal{U}$ par

$$\underbrace{J_\epsilon(v)}_{\text{coût pénalisé}} = J(v) + \underbrace{\frac{1}{\epsilon}.\psi(v)}_{\text{terme de pénalisation}}$$

Théorème 4.4.1 *On suppose (i) et (ii) vrai. Pour tout $\epsilon > 0$, $\exists u_\epsilon \in \mathcal{U}$ (unique) vérifiant $J_\epsilon(u_\epsilon) = \inf_{v \in \mathcal{U}} J_\epsilon(v)$ De plus, la suite (u_ϵ) converge faiblement vers u quand $\epsilon \to 0$, l'unique solution du problème.*

$$\begin{cases} u \in \mathcal{U}_{ad} \\ J(u) \leq J(v),\ \forall v \in \mathcal{U}_{ad} \end{cases}$$

Preuve 7 ***Etape 1*** *:*
Etape 2 *:*
Soit (u_ϵ) le minimiseur de la suite (J_ϵ).
On a $J_\epsilon(u_\epsilon) = J(u_\epsilon) + \frac{1}{\epsilon}\psi(u_\epsilon)$. Par conséquent

$$\|u_{\epsilon'}\| \longrightarrow +\infty \Rightarrow J_{\epsilon'}(u_{\epsilon'}) \longrightarrow +\infty$$

Or $J_{\epsilon'}(u_{\epsilon'}) \leq J_{\epsilon'}(v) \quad \forall v \in \mathcal{U}$.
Donc $J_{\epsilon'}(u_{\epsilon'}) \leq J(v) + \frac{1}{\epsilon'}\psi(v) \quad \forall v \in \mathcal{U}$ en particulier $v \in \mathcal{U}_{ad}$.
Par conséquent $J_{\epsilon'}(u_{\epsilon'}) \leq J(v)$ est absurde.
Ce qui montre que (u_ϵ) est bornée, donc il existe $u^* \in \mathcal{U}$ tel que $u_\epsilon \rightharpoonup u^*$.
Etape 3 *: $u^* \in \mathcal{U}_{ad}$*
Commencons par montrer que J est borné inférieurement. Sinon

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \exists v_n \in \mathcal{U} / \quad J(v_n) < -n.$$

La suite ainsi générée est bornée. Sinon

$$\exists (v_{nk}) \quad tq \quad \|v_{nk}\| \longrightarrow +\infty \quad et \quad donc \quad J(v_{nk}) \longrightarrow +\infty$$

or $J(v_{nk}) \leq -n_k \Rightarrow J(v_{nk}) \longrightarrow -\infty$.
Donc il existe $v^* \in \mathcal{U}$ et (v_{nk}) tq $v_{nk} \rightharpoonup v^*$, ainsi

$$J(v^*) \leq \liminf J(v_{nk}) = -\infty$$

impossible.
Par conséquent J est minorée sur $\mathcal{U}$, et il existe $K > 0$ tel que $-K \leq J(v); \quad \forall v \in \mathcal{U}$.
On a bien

$$J_\epsilon(u_\epsilon) \leq J_\epsilon(v) \quad \forall v \in \mathcal{U}.$$

En particulier pour $v = v_0 \in \mathcal{U}_{ad}$ on a

$$J(u_\epsilon) + \frac{1}{\epsilon}\psi(u_\epsilon) \leq J(v_0)$$

ce qui implique que $-\epsilon K + \psi(u_\epsilon) \leq \epsilon J(v_0)$.
On passe à la limite inf car $u_\epsilon \rightharpoonup u^*$, *on obtient*

$$\psi(u^*) \leq \liminf \psi(u_\epsilon) \leq 0.$$

Comme $\psi(u^*) \geq 0$, *il en résulte que* $\psi(u^*) = 0$ *et donc* $u^* \in \mathcal{U}_{ad}$.
Etape 4 *: Montrons que* $u^* = u$
On a $J_\epsilon(u_\epsilon) = J(u_\epsilon) + \frac{1}{\epsilon}\psi(u_\epsilon) \leq J(u)$. *Comme* $\psi \geq 0$ *donc* $J(u_\epsilon) \leq J(u)$. *En passant à la limite inf, on obtient*

$$J(u^*) \leq \liminf J(u_\epsilon) \leq J(u).$$

Donc u^* *est optimal et comme* J *est strictement convexe alors on a* $u^* = u$.

4.5 Contrôle d'un système distribué gouverné par un opérateur elliptique

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, un ouvert borné de frontière de classe $C^{1,1}$. $f \in L^2(\Omega)$ donné, $a_0 \in L^\infty(\Omega)$ avec $a_0(x) \geq \beta > 0$

$\forall v \in L^2(\Omega)$ (variable de contrôle).

Ici, l'opération de contrôle est $B\left(L^2(\Omega),\ L^2(\Omega)\right)$.

On considère le problème aux limites

$$\begin{cases} -\Delta y + a_0.y = f + v \quad \text{dans } \Omega \\ y = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{cases} \tag{4.11}$$

f et $v \in L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega)$ donc le système est bien posé, et $y(f,v) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$

4.5.1 Observation distribuée

On donne ensuite l'observation $z(v) = Cy(f(v))$ ou $C \in \mathcal{L}\left(H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)\right)$; autrement dit, on observe $y(f,v)$ dans $L^2(\Omega)$.

4.5.2 Fonction coût Le problème de contrôle

Pour $v \in L^2(\Omega)$, on considère le coût $J(v) = \int_\Omega \left|y(f,v) - z_d\right|^2 dx + N\int_\Omega |v|^2 dx$ où $z_d \in L^2(\Omega)$ est un état désiré fixé et $N > 0$ est un paramètre économique.

Maintenant, soit $\mathcal{U}_{\text{ad}} \subset L^2(\Omega)$ un convexe fermé non vide.

Le problème de contrôle optimal est de trouver $u \in L^2(\Omega)$ tel que $J(u) = \inf_{v \in \mathcal{U}_{\text{ad}}} J(v)$

Remarque

4.5.3 Existence du contrôle optimal

Théorème 4.5.1 *Sous les hypothèses sur* f *et* a_0, *le problème (4) admet une solution* u.

Preuve 8

- *J est propre (régularité pour* $v = 0$*).*
- *s.c.i*
- *Coercivité évidente*

D'où l'existence de u. Comme de plus J es strictement convexe, on a l'unicité.

4.5.4 Caractérisation du contrôle

La fonction J est gateau-différentiable sur $L^2(\Omega)$.
En effet, l'application $v \longmapsto y(f,v) - y(f,0)$ est linéaire, et donc

$$y(f,u+t\omega) - y(f,0) = (y(f,u) - y(f,0)) + t.(y(f,\omega) - y(f,0))$$

On en déduit que J est G-différentiable au point u dans la direction $\omega \neq 0$ et

$$J'(u)(\omega) = 2\langle y(f,u) - z_d, y(f,\omega) - y(f,0)\rangle_{L^2(\Omega)} + 2N\langle u,\omega\rangle_{L^2(\Omega)}$$

On a donc la propriété suivante :
Soit $u \in L^2(\Omega)$. Alors les deux propositions suivantes sont équivalentes

1. *u est un contrôle optimal*
2. $u \in \mathcal{U}_{ad}$ *et* $\langle y(f,u) - z_d, y(f,v-u) - y(f,0)\rangle + N\langle u, v-u\rangle \geq 0, \quad \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$

4.5.5 Système d'optimalité

Il s'agit maintenant d'interprèter (2) pour la rendre plus explicite.

Remarque
Dans le cas où $\mathcal{U}_{\text{ad}} = \mathcal{U}$, alors (2) : $\langle y(u) - z_d, y(v) - y(0)\rangle + N\langle u, v\rangle = 0, \quad \forall v \in \mathcal{U}$.

On introduit donc la notion d'adjoint P à déterminer tel que (I) : $\begin{cases} -\Delta P + a_0 P = y(u) - z_d \\ P = 0 \quad \text{sur } \Gamma \end{cases}$
dans ce cas, $A^* = A$.

Le problème (I) est bien posé, et on l'appelle état adjoint.

En multipliant la première équation de (I) par $z = y(v-u) - y(0)$, où $Az = v - u$ et en intégrant par parties, on obtient

$$\langle y(u) - z_d, z\rangle = \langle P, v-u\rangle_{L^2(\Omega)}$$

En remplacant cette égalité dans (ii), on obtient :

$$\langle P, v-u\rangle + N\langle u, v-u\rangle \geq 0, \ \forall v \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$$

donc $\langle P + Nu, v-u\rangle \geq 0, \ \forall v \in \mathcal{U}_{\text{ad}}$, et dans ce cas $\mathcal{U}_{\text{ad}} = \mathcal{U}$

$$\langle P + Nu, v\rangle_{L^2(\Omega)} = 0, \ \forall v \in \mathcal{U} = L^2(\Omega)$$

D'où le théorème suivant :

Théorème 4.5.2 *Soit $u \in \mathcal{U}_{ad}$, la condition nécessaire et suffisante pour que u soit contrôle optimal du problème est qu'il existe le triplet (u, y, P) solution d'optimalité.*

$$\begin{cases} -\Delta y + a_0 y = f + u \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\Delta P + a_0 P = y - z_d \\ P = 0 \end{cases}$$

$\langle P + Nu, v-u\rangle \geq 0, \ \forall v \in \mathcal{U}_{ad}$
(sans contrainte) $\langle P + Nu, v\rangle = 0, \ \forall v \in L^2(\Omega)$.

5

Application

Introduction

La théorie du contrôle étudie les propriétés des systèmes commandés (ou contrôlés), c'est à dire, des systèmes dynamiques dépendant d'une variable t qui représente le plus souvent le temps, sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle) **[13]**.

L'objectif de la théorie de contrôle peut être :

• de stabiliser le système, c'est à dire, le rendre insensible à des perturbation ; c'est ce qu'on appelle la stabilisation.

• de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation ; c'est ce qu'on appelle le **contrôle optimal**.

Rappelons maintenant la définition du contrôle optimal.

Le contrôle optimal des systèmes distribués est un problème d'optimisation défini par l'ensemble de cinq considérations :

• un système modélisant un phénomène (physique, chimique, biologique... etc) dont l'état associé est gouverné par une équation aux dérivées partielles ou une équation différentielle ordinaire.

• un ensemble de variables contrôle qui permet d'agir sur l'état

• un système d'observation qui informe de l'état du système.

• une fonction coût ou fonction objectif, fonction de l'état du système via l'observation et la variable de contrôle.

• un problème d'extrémum pour la fonction coût.**[13]**

5.1 Contrôle optimal d'un problème elliptique

La théorie du contrôle optimal est un outil mathématique puissant qui permet de résoudre de nombreux problèmes réels, dans les domaines d'ingénierie, de médecine, de dynamique des populations, ou de finance. Afin d'illustrer la motivation derrière cette théorie, nous allons présenter un exemple.

5.1.1 Présentation d'un problème de contrôle optimal

. Considérons, à titre d'exemple, le modèle elliptique décrit par le système suivant :

$$\begin{cases} -\Delta y + a_0 y = f + v \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ \\ \dfrac{\partial y}{\partial v} = g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.1}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière lipschitzienne $\partial\Omega$, $f \in L^2(\Omega)$ est le terme source ,$a_0 \in L^\infty(\Omega)$, $a_0 \geq \beta > 0$, $v \in L^2(\Omega)$ le contrôle et $g \in L^2(\partial\Omega)$ la condition aux limites de type Neumann non homogène.

5.1.2 Fonction coût de problème de contrôle

. Pour $v \in L^2(\Omega)$, on considère le coût :

$$J(f,g,v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |y(f,g,v) - z_d|^2 dx + \frac{N}{2}\int_\Omega |v|^2 dx, \tag{5.2}$$

où $z_d \in L^2(\Omega)$ est un état désiré fixé et $N > 0$ est un paramètre économique avec $y(f,g,v)$ solution de l'équation **(5.1)**.
Soit $U_{ad} \subset L^2(\Omega)$ un convexe fermé non vide.

Le problème de contrôle optimal est

$$\begin{cases} \text{Trouver} \quad h \in U_{ad} \quad \text{tel que} \\ \\ J(h) \leq \inf\limits_{v \in U_{ad}} J(f,g,v) \end{cases} \tag{5.3}$$

5.1.3 Existence-unicité et régularité d'une solution $y(f,g,v)$

Le théorème suivant assure l'existence-unicité et la régularité de la solution $y(f,g,v)$

Théorème 5.1.1 *L'équation **(5.1)** admet une solution unique dans $H^1(\Omega)$.*

Preuve

En se référant à l'établissement de la formulation variationnelle établie pour le problème de Neumann non homogène, la formulation variationnelle de l'équation (5.1)est donnée par :

$$a(u,\varphi) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi \, dx + \int_\Omega a_0 u\varphi \, dx$$

et la forme linéaire défini sur V donnée par

$$l(\varphi) = \int_{\partial\Omega} g\varphi d\sigma + \int_\Omega (f+v)\varphi \, dx.$$

Sous les hypothèses précédentes, $a(.,.)$ est continue et coercive de plus $l(\varphi)$ est linéaire.Donc d'après le lemme de Lax-Milgram l'équation **(5.1)** admet une solution unique dans $H^1(\Omega)$

5.1.4 Existence-unicité du contrôle optimal

. Après avoir monter l'existence de la solution du problème **(5.1)**, nous allons à présent montrer l'existence et l'unicité du contrôle optimal. L'objet de cette section est de donner des conditions suffisantes pour l'existence d'au moins une solution du problème **(5.1)**.

On a :

Théorème 5.1.2 *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Le Probleme de contrôle optimal **(5.3)** admet une unique solution $h \in U_{ad}$.*

Preuve
Il s'agira pour nous de montrer que J est propre, coercive, semi continue inférieurement et strictement convexe

Montrons que la fonctionnelle J est propre.

Il existe $v \in U_{ad}$ tel que $\|v\| < +\infty$.

$$J(v) \leq C\left(\|g\|^2_{L^2(\partial\Omega)} + \|f\|^2_{L^2(\Omega)} + \|v\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + \|z_d\|^2_{L^2(\Omega)} < +\infty \tag{5.4}$$

Donc la fonctionnelle J est propre.

Montrons que J est coercive
On a :

$$\frac{1}{2}\left|\|y(f,g,v) - z_d\right|\|^2_{L^2(\Omega)} \geq 0$$

et

$$\lim_{\|v\|\to+\infty} \frac{N}{2}|v|^2_{L^2(\Omega)} = +\infty.$$

Ainsi

$$\lim_{\|v\|\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\left|\|y(f,g,v) - z_d\right|\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{N}{2}|v|^2_{L^2(\Omega)}\right] = +\infty.$$

D'où

$$\lim_{\|v\|\to+\infty} J(f,g,v) = +\infty.$$

Donc J est coercive.

Montrons que J est strictement convexe.
Considérons maintenant la fonction Φ définie sur $L^2(\Omega)$ par

$$\Phi(v) = y(f,g,v).$$

Montrons que Φ est une application affine.
Soit y_0 solution du système suivant :

$$\begin{cases} -\Delta y_0 + a_0 y_0 = f, \\ \\ \frac{\partial y_0}{\partial \nu} = g, \end{cases}$$

et soit l'application à $U_{ad} \ni v \mapsto l(v) = u_1$ solution du système suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + a_0 u_1 = v \\ \\ \frac{\partial u_1}{\partial \nu} = 0 \end{cases}$$

Posons $l(v + \theta w) = u$. La fonction u est alors solution du système suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u + a_0 u = (v + \theta w), \\ \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \end{cases}$$

Montrons que l est linéaire.
En posant u_1 solution de

$$\begin{cases} -\Delta u_1 + a_0 u_1 = v, \\ \frac{\partial u_1}{\partial \nu} = 0, \end{cases}$$

et u_2 solution de :

$$\begin{cases} -\Delta u_2 + a_0 u_2 = w, \\ \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = 0. \end{cases}$$

On a

$$\begin{cases} -\Delta \theta u_2 + a_0 \theta u_2 = \theta w, \\ \frac{\partial (\theta u_2)}{\partial \nu} = 0. \end{cases} \tag{5.5}$$

En sommant membre a membre, on obtient le système :

$$\begin{cases} -\Delta (u_1 + \theta u_2) + a_0 (u_1 + \theta u_2) = (v + \theta w), \\ \frac{\partial (u_1 + \theta u_2)}{\partial \nu} = 0. \end{cases}$$

$$l(v) = u_1 \text{ et } l(\theta w) = \theta u_2 = \theta l(w)$$

$$l(v + \theta w) = u = u_1 + \theta u_2 = l(v) + \theta l(w).$$

D'où l est linéaire.
$\Phi(v) = l(v) + y_0$ avec y_0 une constante. Ainsi l'application Φ est affine.
l'application

$$v \longmapsto y(f, g, v) - z_d$$

est affine.
l'application

$$u \longmapsto |u|^2$$

est strictement convexe sur Ω. Ainsi l'application

$$u \longmapsto \frac{1}{2} \int_\Omega |u|^2 dx$$

est strictement convexe.
Donc l'application

$$v \longrightarrow \frac{1}{2} \int_\Omega |y(f, g, v) - z_d|^2 dx$$

est strictement convexe.

Montrons que J est semi-continue inférieurement faible.
J est continue et strictement convexe sur U_{ad}. Donc J est semi-continue inférieurement faible.

Comme J est propre ,coercive ,semi-continue inférieurement faible et strictement convexe sur U_{ad},alors il existe $u \in U_a d$ unique tel que

$$J(h) = \inf J(f, g, v).$$

5.1.5 Caractérisation du contrôle optimal.

Dans cette sous section il s'agira pour nous de donner la caractérisation du contrôle optimal c'est à dire donner la condition nécessaire et suffisante pour que h soit un contrôle optimal. Pour ce faire nous montrons d'abord que la fonction J est gâteau différentiable sur $L^2(\Omega)$.

On introduit pour cela la dérivée directionnelle définie comme suit :

Définition 5.1.1 *Soit $J : L^2(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}, h \in L^2(\Omega)$ et $w \in L^2(\Omega)$ avec $w \neq 0$.*
On dit que J est gâteau différentiable au point h dans la direction w ,

$$si \quad \lim_{t \to 0} \frac{J(h + tw) - J(h)}{t} \in \mathbb{R}. \tag{5.6}$$

S'il en est ainsi, on note :

$$J'(h)(w) = \lim_{t \to 0} \frac{J(h + tw) - J(h)}{t}. \tag{5.7}$$

Nous avons le lemme suivant :

Lemme 5.1.1 *Pour h et w de U_{ad} nous avons :*

$$J'(h)(w) = \langle y(f, g, h) - z_d, y(0, 0, w) \rangle + N \langle h, w \rangle.$$

Preuve
l'application $v \mapsto y(f, g, v) \in L^2(\Omega)$ est continue affine donc différentiable.
L'application $||.||^2$ est différentiable donc $J(h) = \frac{1}{2} \left| |y(f, g, h) - z_d| \right|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{N}{2} ||h||^2_{L^2(\Omega)}$ est différentiable comme composée de deux applications différentiables.
On a :

$$J(f, g, h + tw) = \frac{1}{2} ||y(f, g, h + tw) - z_d||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{N}{2} ||h + tw||^2_{L^2(\Omega)}.$$

et

$$J(f, g, h) = \frac{1}{2} ||y(f, g, h) - z_d||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{N}{2} ||h||^2_{L^2(\Omega)}.$$

D'où

$$\begin{aligned} J(f, g, h + tw) - J(h) = & \frac{1}{2} ||y(f, g, h) + ty(0, 0, w) - z_d||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{N}{2} ||h + tw||^2_{L^2(\Omega)} \\ & - \left(\frac{1}{2} ||y(f, g, h) - z_d||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{N}{2} ||h||^2_{L^2(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta_1(f,g,h) &= \frac{1}{2}\|y(f,g,h)-z_d\|^2_{L^2(\Omega)}\\
\delta_1(f,g,h+tw) &= \frac{1}{2}\|y(f,g,h)+ty(0,0,w)-z_d\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&= \frac{1}{2}\langle y(f,g,h)+ty(0,0,w)-z_d, y(f,g,h)+ty(0,0,w)-z_d\rangle\\
&= \frac{1}{2}\left(\|y(f,g,h)-z_d\|^2_{L^2(\Omega)}+2t\langle y(f,g,h)-z_d, y(0,0,w)\rangle+t^2\|y(0,0,w)\|^2\right)\\
&= \frac{1}{2}\|y(f,g,h)-z_d\|^2_{L^2(\Omega)}+t\langle y(f,g,h)-z_d, y(0,0,w)\rangle+\frac{t^2}{2}\|y(0,0,w)\|^2.
\end{aligned}$$

De plus

$$\begin{aligned}
\delta_2 &= \frac{N}{2}\|h\|^2_{L^2(\Omega)}\\
\delta_2(h+tw) &= \frac{N}{2}\|h+tw\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&= \frac{N}{2}\langle h+tw, h+tw\rangle\\
&= \frac{N}{2}\left(\|h\|^2+2t\langle h,w\rangle+\|tw\|^2\right)\\
&= \frac{N}{2}\|h\|^2+Nt\langle h,w\rangle+\frac{N}{2}t^2\|w\|^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J(f,g,h+tw)-J(f,g,h) = &\frac{1}{2}\|y(f,g,h)-z_d\|^2_{L^2(\Omega)}+t\langle y(f,g,h)-z_d, y(0,0,w)\rangle+\frac{t^2}{2}\|y(0,0,w)\|^2\\
&+\frac{N}{2}\|h\|^2+Nt\langle h,w\rangle+\frac{N}{2}t^2\|w\|^2-\frac{1}{2}\|y(f,g,h)-z_d\|^2_{L^2(\Omega)}-\frac{N}{2}\|h\|^2_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

$$J(f,g,h+tw)-J(f,g,h) = t\langle y(f,g,h)-z_d, y(0,0,w)\rangle+\frac{t^2}{2}\|y(0,0,w)\|^2+Nt\langle h,w\rangle+\frac{N}{2}t^2\|w\|^2.$$

En passant à la limite on obtient,

$$\lim_{t\to 0}\frac{J(f,g,h+tw)-J(f,g,h)}{t} = \langle y(f,g,h)-z_d, y(0,0,w)\rangle+N\langle h,w\rangle.$$

Ainsi

$$J'(h)(w) = \langle y(f,g,h)-z_d, y(0,0,w)\rangle+N\langle h,w\rangle.$$

Posons $w = v-h$,
d'où $J'(h)(v-h) = \langle y(f,g,h)-z_d, y(0,0,v-h)\rangle+N\langle h, v-h\rangle$.

Théorème 5.1.3 *Soit J une fonctionnelle gâteau différentiable convexe et U_{ad} un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert. Les deux propositions suivantes sont équivalentes*

i) h minimise J sur U_{ad},

ii) $h \in U_{ad}$ et $J'(h)(v-h) \geq 0, \forall v \in U_{ad}$.

Remarque 5.1.1 *Si de plus $U_{ad} = L^2(\Omega)$, alors $J'(h) = 0$*

5.1.6 Système d'optimalité

Nous donnons une caractérisation du contrôle optimal par un système d'optimalité. Dans ce cas nous introduisons la notion de l'état adjoint.

Proposition 5.1.1 (État adjoint et condition d'optimalité) *Soit P solution du problème adjoint suivant.*

$$\begin{cases} -\Delta P + a_0 P = y(f,g,h) - z_d; \quad dans \quad \Omega, \\ \\ \frac{\partial P}{\partial \nu} = 0 \quad sur \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.8}$$

La fonction $h \in U_{ad}$ est solution du problème (5.3) si et seulement si

$$\forall v \in U_{ad} \quad \langle P + Nh, v - h\rangle \geq 0. \tag{5.9}$$

Preuve_ Considérons la fonction $y(v-h)$ solution du système suivant :

$$\begin{cases} -\Delta y(v-h) + a_0 y(v-h) = v - h \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ \\ \frac{\partial y(v-h)}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{5.10}$$

Multiplions la première équation de **(5.10)** par P et procédons à l'intégration par parties sur Ω

$$\int_\Omega -\Delta y(v-h)Pdx + \int_\Omega a_0 y(v-h)Pdx = \int_\Omega (v-h)Pdx. \tag{5.11}$$

En utilisant la formule de Green on obtient :

$$\begin{aligned} \int_\Omega -\Delta y(v-h)Pdx = \int_\Omega -\Delta P y(v-h)dx - \int_{\partial\Omega} P\frac{\partial y(v-h)}{\partial \nu}d\sigma \\ + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial P}{\partial \nu} y(v-h)d\sigma. \end{aligned}$$

(5.11) devient

$$\begin{aligned} \int_\Omega -\Delta P y(v-h)dx + \int_\Omega a_0 y(v-h)Pdx &= \int_\Omega (v-h)Pdx \\ \Leftrightarrow \int_\Omega (-\Delta P + a_0 P)y(v-h)dx &= \int_\Omega (v-h)Pdx. \end{aligned}$$

c'est à dire,

$$\langle y(f,g,h) - z_d, y(0,0,v-h))\rangle = \langle P, v-h\rangle. \tag{5.12}$$

Par conséquent :

$$\langle P, v-h\rangle + N\langle h, v-h\rangle \geq 0 \quad \forall v \in \quad U_{ad}. \tag{5.13}$$

ou encore

$$\forall v \in U_{ad} \quad \langle P + Nh, v-h\rangle \geq 0. \tag{5.14}$$

Après avoir expliciter l'état adjoint du système (5.1), nous donnons ici le système d'optimalité suivant :

Théorème 5.1.4 (Système d'optimalité)) *Soit $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\partial\Omega)$, la condition nécessaire et suffisante pour que h soit contrôle optimal du problème* ***(5.2)*** *est qu'il existe un unique triplet (h, y, P), $h \in U_{ad}$, solution du système d'optimalité*

$$\begin{cases} -\Delta y + a_0 y = f + h \quad dans \quad \Omega, \\ \frac{\partial y}{\partial v} = g \quad sur \quad \partial\Omega, \\ -\Delta P + a_0 P = y - z_d \quad dans \quad \Omega, \\ \frac{\partial P}{\partial v} = 0 \quad sur \quad \partial\Omega, \\ \langle P + Nh, v - h\rangle \geq 0 \quad \forall v \in U_{ad}. \end{cases} \tag{5.15}$$

Remarque 5.1.2 *Dans le cas où $U_{ad} = L^2(\Omega)$, l'inégalité d'optimalité $\langle P + Nh, v - h\rangle \geq 0$ devient $P + Nh = 0$.*

5.2 Méthode numérique

. La solution exacte d'un problème d'équations différentielles ou aux dérivées partielles est une fonction continue. Les ordinateurs ne connaissent que le fini et le discret. Les solutions approchées seront calculées en définitive comme des collections de valeurs discrètes sous la forme de composantes d'un vecteur solution d'un problème matriciel [7].

En vue du passage d'un problème exact **(continu)** au problème approché **(discret)**, on dispose de plusieurs techniques concurrentes et complémentaires : les différences finies, les éléments finis et les volumes finis. Chacune de ces trois méthodes correspond une formulation différente des equations de la physique :
— équilibre des forces en chaque point pour méthode des **différences finies** .
— loi de conservation et calcul des flux pour méthode des **volumes finis**.
— minimisation de l'énergie ou principe des travaux virtuels pour la méthode des **éléments finis**.

Dans notre travail nous utiliserons la méthode des **différence finies** la pour discrétisation de notre problème.

5.2.1 Calcul approché de la solution du problème dans le cas sans contrainte par la méthode des différences finies.

Comme annoncé ci-dessus, nous abordons ici la méthode des différences finies. Après présentation et discrétisation du problème, nous faisons quelques applications concrètes avec notre problème.

Nous nous limitons cependant à l'examen de la méthode en dimension un d'espace.

Présentation du problème

Considérons le système d'optimalité sans contrainte donné par le problème **(5.15)**.
On a $P + Nh = 0 \Leftrightarrow h = -\frac{1}{N}P$

En dimension un d'espace nous obtenons le système couplé suivant :

$$\begin{cases} -y'' + a_0 y = f - \frac{1}{N} P \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ y'(0) = g_0 = -g(0),\ y'(1) = g_1 = g(1) \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \\ -y - P'' + a_0 P = -z_d \quad \text{dans} \quad \Omega, \\ P'(0) = P'(1) = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{5.16}$$

Pour la discrétisation du domaine, on introduit un pas d'espace $\Delta x > 0$

Génération du maillage

On cherche une approximation de la solution aux nœuds du maillage, c'est à dire en les points x_i pour $i = 0, ..., N$. On a alors $y(x_i) \approx y_i$, pour $i = 0, ..., N$.
En utilisant les conditions aux limites, on peut déjà poser $y'(0) = g_0$ et y'(1)= g_1
Il reste à trouver le problème approche dont le vecteur $(u_1, ..., u_{N-1})$ est solution.
Soit $i = 1, ..., N-1$, on écrit l'équation à discrétiser en x_i, on a $-y''_i + a_0 y_i + \frac{1}{N} P_i = f_i$,

Approximation des opérateurs différentiels.

En ecrivant un développement de Taylor en x_{i-1} et x_{i+1}, on obtient :

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \Delta x y'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2} y''(x_i) + \frac{\Delta x^3}{6} y^{(3)}(x_i) + O(\Delta x^4)$$

$$y(x_{i-1}) = y(x_i) - \Delta x y'(x_i) + \frac{\Delta x^2}{2} y''(x_i) - \frac{\Delta x^3}{6} y^{(3)}(x_i) + O(\Delta x^4)$$

La somme de ces deux equations, nous donne

$$y(x_{i+1}) + y(x_{i-1}) = 2y(x_i) + \Delta x^2 y''(x_i) + R(\Delta x^4), \tag{5.17}$$

soit encore

$$-y''(x_i) = \frac{-y(x_{i+1}) + 2y(x_i) - y(x_{i-1})}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2), \tag{5.18}$$

On néglige le terme d'erreur, et on obtient le problème approche suivant :

$$\begin{cases} \frac{-y_{i+1}+2y_i-y_{i-1}}{\Delta x^2} + a_0 y_i + \frac{1}{N} P_i = f_i \\ y'(0) = g_0, y'(1) = g_1 \\ \frac{-P_{i+1}+2P_i-P_{i-1}}{\Delta x^2} + a_0 P_i - y_i = -z_{d_i} \\ P'(0) = P'(1) = 0 \end{cases} \tag{5.19}$$

où $i = 1, ..., n$.

f_i et $-z_{d_i}$ sont des approximations connues (puisque f et $-z_d$ sont connue) de $f(x_i)$ et de z_{d_i}. Si f et $-z_d$ sont continues, on peut choisir $f_i = f(x_i), a_i = \Delta x^2 a_0(x_i)$ si f est $L^2(]0,1[)$ on peut choisir.

$$f_i = \frac{1}{\Delta x} \int_{(i-\frac{1}{2})\Delta x}^{(i+\frac{1}{2})\Delta x} f(x)dx$$

De même on peut choisir,

$$-z_{d_i} = -\frac{1}{\Delta x} \int_{(i-\frac{1}{2})\Delta x}^{(i+\frac{1}{2})\Delta x} z_d(x)dx$$

Il est important de noter que dans le problème approche, on a remplace la solution exacte par la solution approchée.
Cherchons les conditions aux limites. De ce fait nous approchons la dérivée première par un schéma décentré du type.

$$y'(0) \simeq \frac{y(\Delta x) - y(0)}{\Delta x}, \quad y'(1) \simeq \frac{y(1) - y(1 - \Delta x)}{\Delta x}$$

Ce qui donne le schéma suivant

$$y_0 = y_1 - \Delta x g_0, \quad y_{n+1} = y_n + \Delta x g_1.$$

En écrivant chacune des equations, on obtient un système linéaire, donne par :

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta x^2}(-y_2 + 2y_1 - y_0) + a_0 y_1 + \frac{1}{N} P_1 = f_1 \\ \frac{1}{\Delta x^2}(-y_3 + 2y_2 - y_1) + a_0 y_2 + \frac{1}{N} P_2 = f_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ \frac{1}{\Delta x^2}(-y_{n+1} + 2y_n - y_{n-1}) + a_0 y_n + \frac{1}{N} P_n = f_n \\ -y_1 + \frac{1}{\Delta x^2}(-P_2 + 2P_1 - P_0) + a_0 P_1 = -z_{d_1} \\ -y_2 + \frac{1}{\Delta x^2}(-P_3 + 2P_2 - P_1) + a_0 P_2 = -z_{d_2} \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ -y_n + \frac{1}{\Delta x^2}(-P_{n+1} + 2P_n - P_{n-1}) + a_0 P_n = -z_{d_n} \end{cases} \tag{5.20}$$

Résolution du système algébrique associé

$$\begin{cases} \frac{1}{\Delta x^2}(-y_2 + 2y_1 - y_0 + \Delta x^2 a_0 y_1) + \frac{1}{N} P_1 = f_1 \\ \frac{1}{\Delta x^2}(-y_3 + 2y_2 - y_1 + \Delta x^2 a_0 y_2) + \frac{1}{N} P_2 = f_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ \frac{1}{\Delta x^2}(-y_{n+1} + 2y_n - y_{n-1} + \Delta x^2 a_0 y_n) + \frac{1}{N} P_n = f_n \\ -y_1 + \frac{1}{\Delta x^2}(-P_2 + 2P_1 - P_0 + \Delta x^2 a_0 P_1) = -z_{d_1} \\ -y_2 + \frac{1}{\Delta x^2}(-P_3 + 2P_2 - P_1 + \Delta x^2 a_0 P_2) = -z_{d_2} \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ -y_n + \frac{1}{\Delta x^2}(-P_{n+1} + 2P_n - P_{n-1} + \Delta x^2 a_0 P_n) = -z_{d_n} \end{cases} \tag{5.21}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\Delta x^2}(-y_2 + (2 + \Delta x^2 a_0) y_1 - y_0) + \frac{1}{N} P_1 = f_1 \\ \frac{1}{\Delta x^2}(-y_3 + (2 + \Delta x^2 a_0) y_2 - y_1) + \frac{1}{N} P_2 = f_2 \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ \frac{1}{\Delta x^2}(-y_{n+1} + (2 + \Delta x^2 a_0) y_n - y_{n-1}) + \frac{1}{N} P_n = f_n \\ -y_1 + \frac{1}{\Delta x^2}(-P_2 + (2 + \Delta x^2 a_0) P_1 - P_0) = -z_{d_1} \\ -y_2 + \frac{1}{\Delta x^2}(-P_3 + (2 + \Delta x^2 a_0) P_2 - P_1) = -z_{d_2} \\ \quad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ -y_n + \frac{1}{\Delta x^2}(-P_{n+1} + (2 + \Delta x^2 a_0) P_n - P_{n-1}) = -z_{d_n} \end{cases} \tag{5.22}$$

Comme $y_0 = y_1 - \Delta x g_0, \quad y_{n+1} = y_n + \Delta x g_1$, on a

$$\begin{cases} \frac{-y_2+(1+\Delta x^2 a_0)y_1}{\Delta x^2} + \frac{P_1}{N} = f_1 - \frac{g_0}{\Delta x} \\ \frac{-y_3+(2+\Delta x^2 a_0)y_2-y_1}{\Delta x^2} + \frac{P_2}{N} = f_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \frac{(1+\Delta x^2 a_0)y_n-y_{n-1}}{\Delta x^2} + \frac{P_n}{N} = f_n + \frac{g_1}{\Delta x} \\ -y_1 + \frac{-P_2+(1+\Delta x^2 a_0)P_1}{\Delta x^2} = -z_{d_1} \\ -y_2 + \frac{-P_3+(2+\Delta x^2 a_0)P_2-P_1}{\Delta x^2} = -z_{d_2} \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ -y_n + \frac{(1+\Delta x^2 a_0)P_n-P_{n-1}}{\Delta x^2} = -z_{d_n} \end{cases} \tag{5.23}$$

$$\Longleftrightarrow AY = F$$

avec

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ y_n \\ P_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} f_1 - g_0/\Delta x \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ f_n + g_1/\Delta x \\ -z_{d_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ -z_{d_n} \end{pmatrix} \tag{5.24}$$

et

$$A = \frac{1}{\Delta x^2}\begin{pmatrix}
1+a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\Delta x^2}{N} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\
-1 & 2+a_2 & -1 & 0 & \vdots & 0 & \frac{\Delta x^2}{N} & 0 & \cdots & \vdots \\
0 & \ddots & \ddots & \ddots\ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\
\vdots & & & & & & & & & \\
0 & \cdots & \cdots & -1 & 1+a_n & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\Delta x^2}{N} \\
-\Delta x^2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1+a_1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & -\Delta x^2 & \cdots & \cdots & 0 & -1 & 2+a_2 & -1 & \cdots & \cdots \\
\vdots & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \cdots & \cdots \\
\vdots & & & & & & & & & \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & -\Delta x^2 & 0 & \cdots & \cdots & -1 & 1+a_n
\end{pmatrix}$$

5.2.2 Résultats de simulations numériques

Exemple 1

Considérons le problème **(5.16)** pour $f(x) = \sin(x), z_d = \cos(x)$. Ce problème admet une solution exacte unique. La discrétisation par la méthode des différences finies par exemple, le pas de discrétisation est donnée par $\Delta x = \frac{b-a}{n+1}$.

Les figures suivantes montrent les graphes de la solution approchée de l'état du système contrôle et la solution approchée du contrôle du problème.

Pour $a = 0, b = 10 \times \pi$ et $n = 200$,on a les figures suivantes.

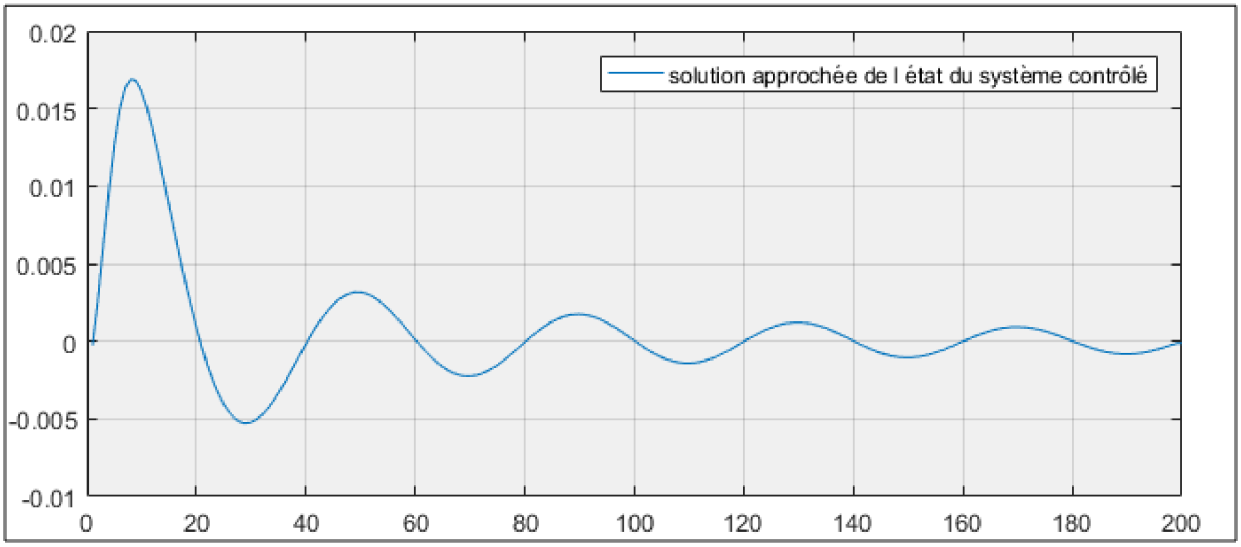


FIGURE 4.1 – Approximation de la solution de l'état du système contrôlé

FIGURE 5.1 – Approximation de la solution de l'état du système contrôlé

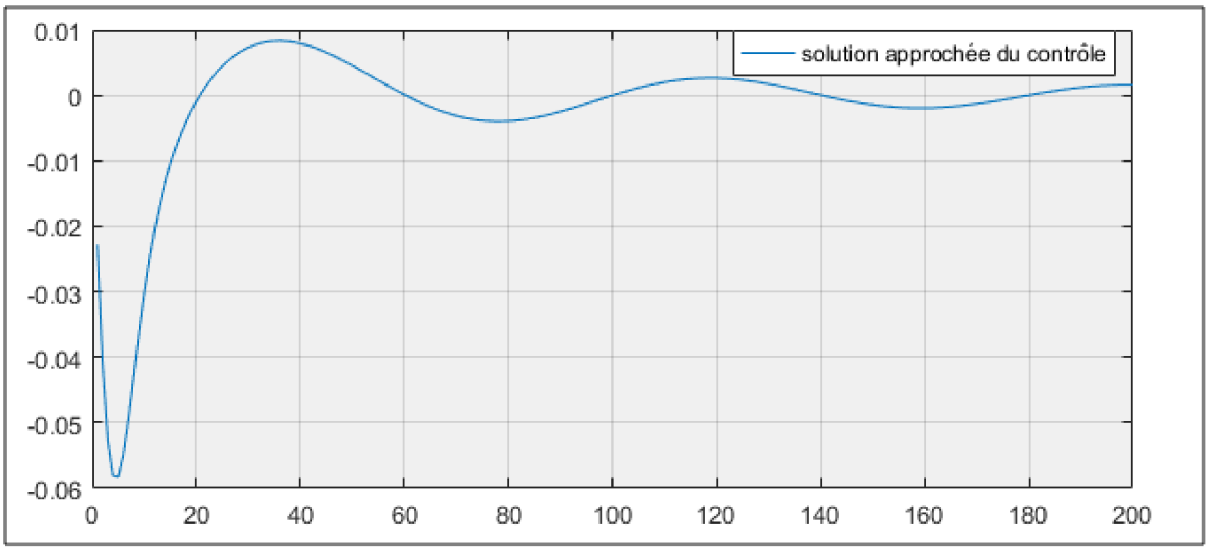


FIGURE 4.2 – Approximation de la solution du contrôle

FIGURE 5.2 – Approximation de la solution du contrôle

Exemple 2

Considérons le problème **(5.16)** pour $f(x) = 2x+\sin^2(x), z_d = \cos^2(x)$. Ce problème admet une solution exacte unique. La discrétisation par la méthode des par la méthode des différences finies par exemple, le pas de discrétisation est donnée par $\Delta x = \frac{b-a}{n+1}$.

Les figures suivantes montrent les graphes de la solution approchée de l'état du système contrôle et la solution approchée du contrôle du problème.

Pour $a = 0, b = 10 \times \pi$ et $n = 200$,on a les figures suivantes.

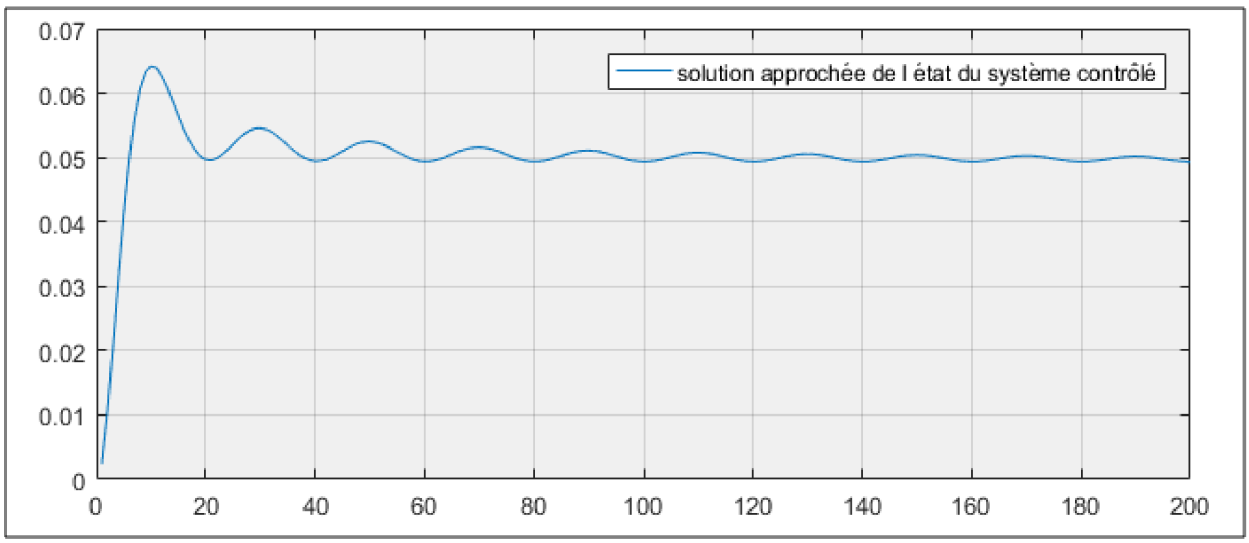


FIGURE 4.3 – Approximation de la solution de l'état du système contrôlé

FIGURE 5.3 – Approximation de la solution de l'état du système contrôlé

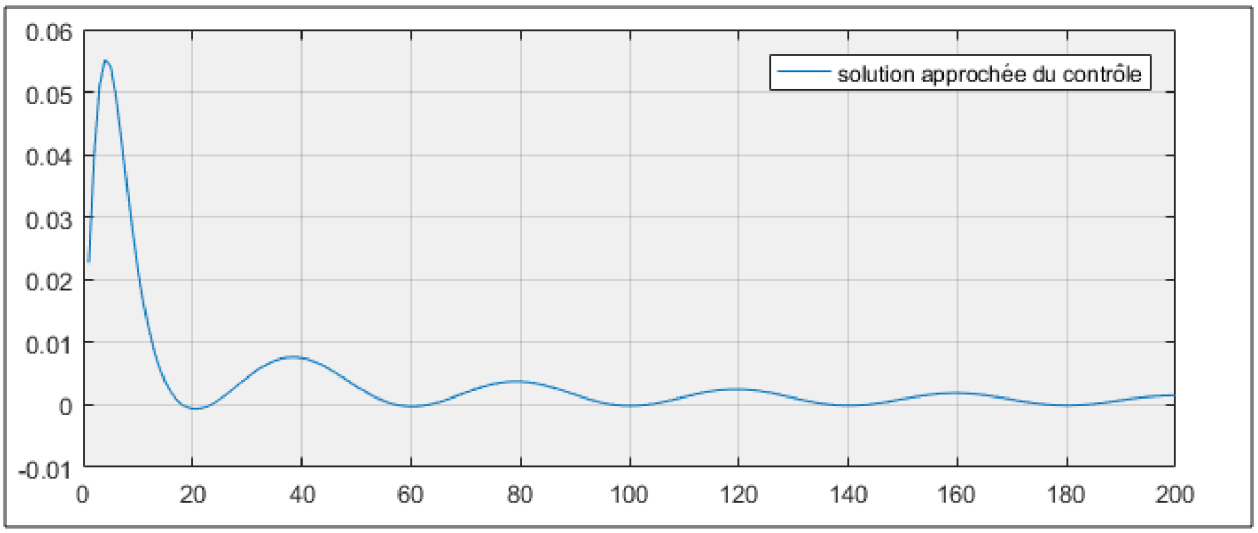


FIGURE 4.4 – Approximation de la solution du contrôle

FIGURE 5.4 – Approximation de la solution du contrôle

Bibliographie

[1] **Naïma El Farouq.** *Thèse de doctorat : Algorithmes de résolution d'inéquations variationnelles*,L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE PARIS.

[2] **Gregoire Allaire**. *Introduction à l'analyse numérique et à l'optimisation*. Les Éditions de l'École Polytechnique, 2005.

[3] **Grégoire ALLAIRE François ALOUGES**.*Analyse variationnelle des équations aux dérivées partielles Polycopié du cours MAP 431*.Département de Mathématiques Appliquées École Polytechnique, année 2015 2016.

[4] **Raphaël Roux.** *Méthodes numériques déterministes*.Université Pierre et Marie Curie Master professionnel IFMA 2013-2014.

[5] **Raphaèle Herbin.** *Analyse numérique des equations aux dérivées partielles.Université Aix Marseille 1*.Master de mathématiques.2006–2007

[6] **Nicolas Champagnat.** *Différences finies et analyse numérique matricielle* : cours d'harmonisation en IMAFA. 15 octobre 2010.

[7] **J-H SAIAC.** *Méthode des éléments finis. Analyse numérique des Équations aux dérivées partielles Polycopie des cours de Calcul Scientifique CSC108 et CSC109*

[8] **J.-F. Scheid.** *Master 2 IMOI, Université de Lorraine Méthodes numériques avancées pour la résolution des EDP.*

[9] **Jean-François Babadjian .** *Équations aux dérivées partielles elliptiques linéaires et non linéaires*.Université Paris-Sud Master de Mathématiques et Applications.

[10] **Claude Zuily.** *Éléments de distributions et d'équations aux dérivées partielles.* Sciences Sup. Dunod, 2002.

[11] **Haïm Brezis.** *Analyse fonctionnelle – Théorie et applications.* Mathématiques appliquées pour la maîtrise. Masson, 1983.

[12] **Mohamed Badr BENBOUBKER.***Sur certains problèmes elliptiques quasi linéaires non homogènes de type Dirichlet ou Neumann*.Doctorat en Mathématiques. Université Sidi Mohamed Ben Abdellah Faculté des Sciences Dhar El Mahraz-Fès.27 Juin 2013,

[13] **Ionel Sorin CIUPERCA**.*cours de contral optimal*.MAM5A, Polytech Lyon, 2018-2019.

[14] **ABABSA Amina épouse ZOUATINE**.*Contrôlabilité à zero des systèmes à deux équations paraboliques avec un seul contrôle*.mémoire magister en mathematiques appliquées option :analyse.14/06 /2012.

[15] **Ismahène Sehili**.*Méthodes spectrales pour les problèmes aux limites.(Méthodes numériques pour la résolution des EDP avec conditions limites)*..Doctorat en Mathématiques Option : Analyse Numérique et Optimisation. Université Mohamed Khider, Biskra.2018.

[16] **Ahmed DLIOUAH, Mohamed KHALFAOUI** *mémoire Pour l'obtention du grade de master Mathématiques Spécialité : EDP*.Département de Mathématiques et Informatiques Université Ziane ACHOUR, Djelfa

[17] E. Trélat, contrôle optimal : *théorie et applications*, Vuibert, Collection "Mathématiques Concrètes" (2005), 246 pages

[18] B.D.O. Anderson, P.V. Kokotovic, *Optimal control problems over large time intervals*, Automatica J. IFAC 23 (1987), no. 3, 355-363.

[19] L.T. Biegler, A. *Wächter*, On *the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming*, *Mathematical Programming* 106 (2006), 25-57.

[20] B. Bonnard, J.-B. Caillau, E. Trélat, *Second order optimality conditions in the smooth case and applications in optimal control*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. 13 (2007), no. 2, 207-236.

[21] B. Bonnard, L. Faubourg, E. Trélat, *Mécanique céleste et contrôle de systèmes spatiaux*, Math. And Appl. 51, Springer Verlag (2006), XIV, 276 pages.

[22] R. Bulirsch, J. Stoer, *Introduction to numerical analysis*, Springer-Verlag, Berlin, :1980.

[23] R. Bulirsch, O. Von Stryk *Direct and indirect methods for trajectory optimization*, Annals of Operations Research 37, 1992, 357-373.

[24] D. Cass, *Optimal growth in an aggregative model of capital accumulation, a turnpike theorem*, *Econometrica*. 34 (1965), 833-850

[25] L. Cesari, *Optimization theory and applications*. Problems with ordinary differential equations, Applications of Mathematics 17, New York, Springer-Verlag, 1983.

[26] J.-M. Coron, P. Gabriel, P. Shang, *Optimization of an amplification protocol for misfolded proteins by using relaxed control*, Preprint Hal (2013).

[27] E. Trélat, Contrôle optimal : *théorie et applications*, Vuibert, Collection "Mathématiques Concrètes" (2005), 246 pages

[28] Emmanuel Trélat, Enrique Zuazua, *The turnpike property in finite-dimensional nonlinear optimal control*, J.Differential Equations(2014) 31 pages.

[29] M. Picasso, J. Rappaz, *Introduction à l'analyse mimétique*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne, 1998.

[30] R. Fletcher, *Practical Methods of Optimization*, Vol. 1, Unconstrained Optimization, and Vol. 2, Constrained Optimization, John Wiley and Sons, 1980.

[31] R. Fourer, D.M. Gay, B.W. Kernighan, *AMPL : A modeling language for mathematical programming*, Duxbury Press, Second edition (2002), 540 pages

[32] S. Fromowitz, O.L. Mangasarian, *The Fritz John necessary optimality conditions in the presence of equality and inequality constraints*, J. Math. Anal. Appl. 17 (1967), 37-47.