Calcul de Structure - Introduction à la méthode des éléments finis

Dr. Yacouba Simporé
simplesaint@gmail.com

12 juin 2020

Table des matières

1 Rappels : Élasticité linéaire **4**

1.1 Tenseurs fondamentaux 4

1.1.1 Tenseurs de déplacements 4

1.1.2 Tenseur de déformation 4

1.1.3 Tenseur des contraintes 4

1.2 Relation entre déplacement et déformation 5

1.3 Relation entre contrainte et déformation 5

2 Formules intégrales **6**

2.1 Méthode des résidus pondérés : Forme intégrale forte 6

2.2 Forme intégrale faible 7

2.2.1 Intégration par parties (dimension un) 7

2.2.2 Formule de Green en dimension deux 7

2.2.3 Formule de Green en dimension trois 7

2.2.4 Forme intégrale faible en élasticité linéaire 8

3 Notions générales – Interpolation nodale **12**

3.1 Discrétisation du milieu continu en sous domaines 12

3.2 Approximation nodale 12

3.2.1 Définition 13

3.2.2 Construction nodale 13

3.3 Transformation géométrique 13

3.3.1 Principe des éléments de référence 13

3.3.2 Interpolation sur l'élément de référence 14

3.3.3 Fonction forme 14

3.3.4 Éléments isoparamétriques 14

3.4 Convergence 16

4 Matrices de rigidités locales **17**

4.1 Découpage de la forme intégrale 17

4.2 Matrice Jacobienne $[J]$ 19

5 Expansion – Assemblage – Résolution **22**

5.1 Représentation du maillage 22

5.1.1 Table de nœud 22

5.1.2 Table de connectivité 22

5.2 Matrice de rigidité et vecteurs forces locaux 23

5.2.1 Principe 23

5.2.2 Vecteur de localisation 23

5.2.3 Utilisation des vecteurs de localisation 24

5.2.4 Utilisation des matrices et vecteurs expansés 25

5.2.5 Particularités du système final 26

6 Application à l'élasticité linéaire **27**

6.1 Application de la forme générale à un élément barre 27

6.1.1 Calcul de $[H]$ 27

6.1.2 Calcul de la matrice $[B]$ 27

6.2 Élément poutre 29

6.2.1 Élément poutre en flexion uniquement 29

6.3 Élément de poutre en tension et flexion combinées 36

6.3.1 Introduction 36

6.3.2 Matrice de rigidité et vecteur force 36

6.4 Extension des formations en dimension 2 et en dimension 3 37

Chapitre 1

Rappels : Élasticité linéaire

1.1 Tenseurs fondamentaux

1.1.1 Tenseurs de déplacements

On considère le tenseur $\mathcal{U}_i$ du champ de déplacement qui est un vecteur noté $\{\mathcal{U}_i\}$ et qui a pour composantes, en trois dimensions

$$\{\mathcal{U}_i\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}.$$

1.1.2 Tenseur de déformation

On considère le tenseur ε_{ij} du champ des déformations (appelé ***tenseur de Green-Lagrange linéarisé***) qui est une matrice symétrique notée $[\varepsilon]$ admettant, en dimension trois, les composantes données par

$$[\varepsilon] = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{pmatrix}.$$

Notons qu'on a également :

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy}, \qquad \gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz}, \quad \text{et} \quad \gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz}.$$

Aussi, on note souvent

$$\langle\varepsilon\rangle = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{pmatrix}$$

1.1.3 Tenseur des contraintes

On note le tenseur de champ σ_{ij} des contraintes (appelé ***tenseur de Cauchy-Euler***) qui est une matrice symétrique notée σ définie en dimension trois par

$$[\sigma] = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix}.$$

On le note souvent

$$\langle\sigma\rangle = \begin{pmatrix}\sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{xz} & \tau_{yz}\end{pmatrix}.$$

On rappelle qu'une surface élémentaire de vecteur normal $\vec{n}$, dans le champ de contrainte $[\sigma]$ subit des efforts par unité de surface $\overrightarrow{T}$, tels que

$$\{T\} = [\sigma] \cdot \{n\}.$$

1.2 Relation entre déplacement et déformation

On peut déterminer facilement les déformations à partir de la connaissance des déplacements en utilisant les relations classiques suivantes :

$$\begin{array}{l|l|ll} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} & & \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} & \text{d'où} & \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & & \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \end{array}.$$

On peut exprimer cette même relation matricielle en utilisant les relations tensorielles

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right).$$

1.3 Relation entre contrainte et déformation

On peut déterminer facilement les contraintes à partir de la connaissance des déformations en utilisant la loi de HOOKE

$$\{\sigma\} = [H] \cdot \{\varepsilon\}.$$

La matrice $[H]$ est appelée ***matrice de HOOKE*** et vaut, pour un matériau homogène et isotrope, défini par son module de Young E et son coefficient de Poisson ν, par

$$[H] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} ; \text{où } a = \frac{1-2\nu}{2}.$$

La loi de HOOKE s'exprime sous forme tensorielle par

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij} \cdot \varepsilon_{kk} + 2G \cdot \varepsilon_{ij},$$

où

- G est le module de cisaillement : $G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$;
- λ est le premier coefficient de Lamé : $\lambda = \dfrac{\nu \cdot E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$.

Chapitre 2

Formules intégrales

On rappelle qu'en élasticité linéaire, le point de départ de l'application de la méthode des éléments finis (MEF) est un système d'équations aux dérivées partielles (EDP), assorti de conditions aux limites :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} & + & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} & + & \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} & + & F_{vx} & = & 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} & + & \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} & + & \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} & + & F_{vy} & = & 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} & + & \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} & + & \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} & + & F_{vz} & = & 0 \end{array}\right.$$

Sur S_u, on impose le champ de déplacement ; et donc on a

$$\{U_i\} = \left\{\begin{array}{c} u \\ v \\ w \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{w} \end{array}\right\}, \quad \text{avec } \bar{u},\ \bar{v},\ \text{et } \bar{w} \text{ connus.}$$

Sur S_f, on applique des efforts de surface $\overrightarrow{f_s}$ qui vont influer sur le champ de contraintes à l'endroit où on applique ces efforts. Cela s'exprime par la relation

$$f_s = [\sigma] \cdot \{n\} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccccc} \sigma_x \cdot n_x & + & \tau_{xy} \cdot n_y & + & \tau_{xz} \cdot n_z & = & f_{sx} \\ \tau_{xy} \cdot n_x & + & \sigma_y \cdot n_y & + & \tau_{yz} \cdot n_z & = & f_{sy} \\ \tau_{xz} \cdot n_x & + & \tau_{yz} \cdot n_y & + & \sigma_z \cdot n_z & = & f_{sz} \end{array}\right.$$

2.1 Méthode des résidus pondérés : Forme intégrale forte

On rappelle que la solution recherchée en élasticité est un champ de déplacement u à travers le domaine v.

On appelle ***résidu***, la quantité $\mathcal{R}(\overrightarrow{u})$ qui est égale à

$$\mathcal{R}(\overrightarrow{u}) = \left\{\begin{array}{ccccccc} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} & + & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} & + & \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} & + & F_{vx} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} & + & \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} & + & \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} & + & F_{vy} \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} & + & \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} & + & \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} & + & F_{vz} \end{array}\right.$$

Bien entendu, si $\mathbb{L}_{ex}$ est une solution exacte du problème tel que modélisé, alors on a

$$\mathcal{R}(\mathbb{L}_{ex}) = \left\{\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$

La méthode des résidus pondérés est une méthode qui consiste à exprimer que l'on recherche la solution sous la forme d'un champ de déplacement $\mathbb{L}$ qui annule le résidu et qui par conséquent annule l'intégrale

$$W = \iiint_V \langle\psi\rangle \left\{\mathcal{R}\left(\overrightarrow{u}\right)\right\} \cdot \mathrm{dv} = 0,$$

où, $\langle\psi\rangle$ est un vecteur de fonction de pondération dont les composantes sont

$$\langle\psi\rangle = \begin{pmatrix}\psi_u & \psi_v & \psi_w\end{pmatrix}.$$

On appelle cette expression ***forme intégrale*** du problème

$$\begin{aligned} W = &\iiint_V \psi_u \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_{vx}\right) \cdot \mathrm{dv} \\ &+ \iiint_V \psi_v \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_{vy}\right) \cdot \mathrm{dv} \\ &+ \iiint_V \psi_w \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_{vz}\right) \cdot \mathrm{dv}. \end{aligned}$$

2.2 Forme intégrale faible

2.2.1 Intégration par parties (dimension un)

Formule de Green en dimension 1 :

$$\int_{x_1}^{x_2} \psi \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{dx}} \cdot \mathrm{dx} = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{dx}} u \cdot \mathrm{dx} + [\psi \cdot u]_{x_1}^{x_2}.$$

2.2.2 Formule de Green en dimension deux

On considère deux fonctions $u(x, y)$ et $\psi(x, y)$ définies à travers un domaine V du plan (x, y). On a

$$\begin{aligned} \iint_V \psi \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y &= -\iint_V \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot u \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y + \oint_S \psi \cdot u \cdot n_x \cdot \mathrm{d}l \\ &= -\iint_V \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot u \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y + \oint_S \psi \cdot u \cdot n_x \,\mathrm{d}l \\ \iint_V \psi \frac{\partial u}{\partial y} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y &= -\iint_V \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot u \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y + \oint_S \psi \cdot u \cdot n_y \,\mathrm{d}l \end{aligned}$$

2.2.3 Formule de Green en dimension trois

$$\begin{aligned} \iiint_V \psi \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z &= -\iiint_V \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot u \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z + \oiint_S \psi \cdot u \cdot n_x \,\mathrm{d}s \\ \iiint_V \psi \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z &= -\iiint_V \frac{\partial \psi}{\partial y} \cdot u \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z + \oiint_S \psi \cdot u \cdot n_y \,\mathrm{d}s \\ \iiint_V \psi \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z &= -\iiint_V \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot u \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z + \oiint_S \psi \cdot u \cdot n_z \,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

2.2.4 Forme intégrale faible en élasticité linéaire

$$W = \iiint_V \psi_u \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iiint_V \psi_v \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$+ \iiint_V \psi_w \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iiint_V \left(\psi_u F_{vx} + \psi_v F_{vy} + \psi_w F_{vz} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

avec

$$A = \iiint_V \psi_u \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = -\iiint_V \left(\frac{\partial \psi_u}{\partial x} \sigma_x + \frac{\partial \psi_u}{\partial y} \tau_{xy} + \frac{\partial \psi_u}{\partial z} \tau_{xz} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$+ \oiint_S \left(\psi_u \cdot \sigma_x \cdot n_x + \psi_u \cdot \tau_{xy} \cdot n_y + \psi_u \cdot \tau_{xz} \cdot n_z \right) \mathrm{d}s,$$

$$B = \iiint_V \psi_v \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = -\iiint_V \left(\frac{\partial \psi_v}{\partial x} \cdot \tau_{xy} + \frac{\partial \psi_v}{\partial y} \cdot \sigma_y + \frac{\partial \psi_v}{\partial z} \cdot \tau_{yz} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$+ \oiint_S \left(\psi_v \cdot \tau_{xy} \cdot n_x + \psi_v \cdot \sigma_y \cdot n_y + \psi_v \cdot \tau_{yz} \cdot n_z \right) \mathrm{d}s$$

et

$$C = \iiint_V \psi_w \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,dz = -\iiint_V \left(\frac{\partial \psi_w}{\partial x} \cdot \tau_{xz} + \frac{\partial \psi_w}{\partial y} \cdot \tau_{yz} + \frac{\partial \psi_w}{\partial z} \cdot \sigma_z \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$+ \oiint_S \left(\psi_w \cdot \tau_{xz} \cdot n_x + \psi_w \cdot \tau_{yz} \cdot n_y + \psi_w \cdot \sigma_z \cdot n_z \right) \mathrm{d}s.$$

d'où

$$W = -\iiint_V \left(\frac{\partial \psi_u}{\partial x} \cdot \sigma_x + \frac{\partial \psi_v}{\partial y} \cdot \sigma_y + \frac{\partial \psi_w}{\partial z} \cdot \sigma_z \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$- \iiint_V \left[\tau_{xz} \left(\frac{\partial \psi_u}{\partial z} + \frac{\partial \psi_w}{\partial x} \right) + \tau_{xy} \left(\frac{\partial \psi_u}{\partial y} + \frac{\partial \psi_v}{\partial x} \right) + \tau_{yz} \left(\frac{\partial \psi_v}{\partial z} + \frac{\partial \psi_w}{\partial y} \right) \right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$+ \oiint_S \psi_u \left(\sigma_x \cdot n_x + \tau_{xy} \cdot n_y + \tau_{xz} \cdot n_z \right) \mathrm{d}s + \oiint_S \psi_v \left(\tau_{xy} \cdot n_x + \sigma_y \cdot n_y + \tau_{yz} \cdot n_z \right) \mathrm{d}s$$
$$+ \oiint_S \psi_w \left(\tau_{xz} \cdot n_x + \tau_{yz} \cdot n_y + \sigma_z \cdot n_z \right) \mathrm{d}s + \iiint_V \left(\psi_u F_{vx} + \psi_v F_{vy} + \psi_w F_{vz} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Pour ce qui est de l'intégrale sur S (intégrale de surface), on rappelle que la frontière du domaine est divisée en deux parties : S_u (déplacements imposés, $\psi = 0$) et S_f (effort de surface).

Ainsi

$$\oiint_S \psi_u \left(\sigma_x \cdot n_x + \tau_{xy} \cdot n_y + \tau_{xz} \cdot n_z \right) \mathrm{d}s + \oiint_S \psi_v \left(\tau_{xy} \cdot n_x + \sigma_y \cdot n_y + \tau_{yz} \cdot n_z \right) \mathrm{d}s$$
$$+ \oiint_S \psi_w \left(\tau_{xz} \cdot n_x + \tau_{yz} \cdot n_y + \sigma_z \cdot n_z \right) \mathrm{d}s$$
$$= \iint_{S_f} \langle \psi \rangle \left\{ f_s \right\} \mathrm{d}s \quad : \quad \text{conditions aux limites.}$$

Finalement, A_1 désignant les deux intégrales volumiques internes ci-dessus,

$$W = A_1 + \iiint_V \langle \psi \rangle \left\{ F_v \right\} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \iint_{S_f} \langle \psi \rangle \left\{ f_s \right\} \mathrm{d}s.$$

Hypothèse de Galerkine

Le choix des fonctions de pondération dans le cadre de l'hypothèse de Galerkine consiste à prendre les variations des composantes du champ de solution recherchée :

$$\langle \psi \rangle = \langle \psi_u \, , \, \psi_v \, , \, \psi_w \rangle = \langle \delta u \, , \, \delta v \, , \, \delta w \rangle$$

où δ est l'opérateur de variation.

Propriétés de l'opérateur δ

$$\delta(u+v) = \delta u + \delta v \, ; \qquad \delta(cu) = c\delta u \, ; \qquad \delta(u \cdot v) = u\delta v + v\delta u \, ; \qquad \delta(P) = \begin{pmatrix} \delta P_1 & \delta P_2 & \delta P_3 \end{pmatrix} ;$$

$$\delta\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} \, ; \qquad \iiint_V \delta u \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \delta\left(\iiint_V u \, dx \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z\right) ;$$

avec u et v deux champs scalaires, et $\langle P \rangle = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \end{pmatrix}$ un champ vectoriel.

Forme intégrale faible avec l'hypothèse de Galerkine

On a $\langle \psi \rangle = \begin{pmatrix} \delta u & \delta v & \delta w \end{pmatrix}$, et donc

$$\begin{aligned} W = & -\iiint_V \left[\frac{\partial(\delta u)}{\partial x}\sigma_x + \frac{\partial(\delta v)}{\partial y}\sigma_y + \frac{\partial(\delta w)}{\partial z}\sigma_z \right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\ & - \iiint_V \left[\tau_{xy}\left(\frac{\partial(\delta u)}{\partial y} + \frac{\partial(\delta v)}{\partial x}\right) + \tau_{xz}\left(\frac{\partial(\delta u)}{\partial z} + \frac{\partial(\delta w)}{\partial x}\right) + \tau_{yz}\left(\frac{\partial(\delta v)}{\partial z} + \frac{\partial(\delta w)}{\partial y}\right) \right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\ & + \iiint_V \left[\begin{pmatrix} \delta u & \delta v & \delta w \end{pmatrix} \{F_v\} \right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + \oiint_S \begin{pmatrix} \delta u & \delta v & \delta w \end{pmatrix} \{f_s\} \, \mathrm{d}s \end{aligned}$$

en appliquant la dernière propriété de l'opérateur δ, on a :

$$\begin{aligned} W = & -\iiint_V \left[\delta(\varepsilon_x)\,\sigma_x + \delta(\varepsilon_y)\,\sigma_y + \delta(\varepsilon_z)\,\sigma_z + \delta(\gamma_{xy})\,\tau_{xy} + \delta(\gamma_{xz})\,\tau_{xz} + \delta(\gamma_{yz})\,\tau_{yz} \right] \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\ & + \iiint_V \langle \delta u \rangle \{F_v\} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + \oiint_S \langle \delta u \rangle \{f_s\} \, \mathrm{d}s \end{aligned}$$

or

$$\langle \varepsilon \rangle = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} & \gamma_{yz} \end{pmatrix} \Longrightarrow \langle \delta\varepsilon \rangle = \begin{pmatrix} \delta\varepsilon_x & \delta\varepsilon_y & \delta\varepsilon_z & \delta\gamma_{xy} & \delta\gamma_{xz} & \delta\gamma_{yz} \end{pmatrix}$$

et

$$\langle \sigma \rangle = \begin{pmatrix} \sigma_x & \sigma_y & \sigma_z & \tau_{xy} & \tau_{xz} & \tau_{yz} \end{pmatrix}$$

Donc on a :

$$W = -\iiint_V \langle \delta\varepsilon \rangle \{\sigma\} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + \iiint_V \langle \delta u \rangle \{F_v\} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + \oiint_S \langle \delta u \rangle \{f_s\} \, \mathrm{d}s$$

avec $\langle \delta u \rangle = \begin{pmatrix} \delta u & \delta v & \delta w \end{pmatrix}$

La forme intégrale faible devient

$$\begin{aligned} W = & -\iiint_V \langle \delta\varepsilon \rangle \{\sigma\} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + \iiint_V \langle \delta u \rangle \{F_v\} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + \oiint_{S_f} \langle \delta u \rangle \{f_s\} \, \mathrm{d}s \\ = & \, 0 \end{aligned}$$

où

- $\iiint_V \langle \delta\varepsilon \rangle \{\sigma\} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$ est le travail virtuel interne ;
- $\iiint_V \langle \delta u \rangle \{F_v\} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$ est le travail virtuel des efforts de volume $\overrightarrow{F_v}$;
- $\oiint_{S_f} \langle \delta u \rangle \{f_s\} \, \mathrm{d}s$ est le travail virtuel des efforts de surface.

Théorème 2.1

La forme intégrale faible avec l'hypothèse de Galerkine pour la plupart des problèmes d'élasticité, correspond en fait aux théorèmes des travaux virtuels dans sa formulation de déplacement :

$$-\iiint_V \langle \delta\varepsilon \rangle \{\sigma\} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + \iiint_V \langle \delta u \rangle \{F_v\} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + \oiint_{S_f} \langle \delta u \rangle \{f_s\} \, \mathrm{d}s = 0.$$

Prise en compte des forces ponctuelles

L'expression déterminée au paragraphe précédent ne s'applique que dans le cas où il n'y a pas de forces ponctuelles qui sont appliquées.

Si tel est le cas, on peut adapter facilement cette expression en introduisant dans l'expression le travail virtuel

$$\sum_{i=1}^{m} \delta U_p^i \cdot F_p^i,$$

des m forces ponctuelles, ce qui donne :

$$-\iiint_V \langle \delta\varepsilon \rangle \{\sigma\} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + \iiint_V \langle \delta u \rangle \{F_v\} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + \oiint_{S_f} \langle \delta u \rangle \{f_s\} \, \mathrm{d}s + \sum_{i=1}^{m} \delta U_p^i \cdot F_p^i = 0$$

Exercice 2.1. *On considère ci-dessous une zone dans l'espace réel (x, y).*

On considère un problème physique décrit sur cette zone pour l'équation aux dérivées partielles suivantes (équation de la chaleur ou équation de Poisson avec $k = 1$ et $q = 1$)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + 1 = 0.$$

$T = 0$ imposée sur le bord 2-3 de la zone

$\dfrac{\partial T}{\partial n} = 0$ (flux nul) sur le bord 1-2, 1-3 de V.

La solution recherchée est le champ scalaire $T(x, y)$ à travers V.

1. *Établir la forme intégrale forte du problème.*
2. *Établir la forme intégrale faible du problème avec l'hypothèse de Galerkine.*

Exercice 2.2. *On considère une barre de longueur $L = 1$ et de module de Young constant E, défini le long de l'axe x, entre $x = 0$ et $x = 1$.*

Cette barre ne travaille qu'en tension ou en compression le long de l'axe x. La section de la barre A est variable le long de l'axe et sa variation est linéaire entre $A(0) = e$ et $A(1) = 1$.

On applique sur cette barre une force horizontale F en $x = 1$ et un blocage du déplacement $u(x)$ en $x = 0$.

La solution recherchée est le champ de déplacement $u(x)$ entre $x = 0$ et $x = 1$.

Formaliser ce problème par une équation différentielle et des conditions de frontière.

Établir la forme intégrale forte du problème.

Établir la forme intégrale faible du problème avec l'hypothèse de Galerkine.

Chapitre 3

Notions générales – Interpolation nodale

Introduction

Les principales étapes de construction d'un modèle Éléments finis sont les suivantes :

- Discrétisation du milieu continu en sous domaine ;
- Construction de l'approximation nodale ;
- Calcul des matrices élémentaires correspondant à la forme intégrale du problème ;
- Assemblage des matrices élémentaires et prise en compte des conditions aux limites ;
- Résolution du système d'équations linéaires.

3.1 Discrétisation du milieu continu en sous domaines

Cette opération consiste à décomposer le domaine continu en un nombre fini de sous domaines, "éléments finis". Le domaine $\mathcal{D}$ en question sera :

$$\mathcal{D}_h = \bigcup_{e=1}^{n_e} \mathcal{D}_e \ : \quad h = \max_e \operatorname{diam}(\mathcal{D}_e), \quad \mathcal{D}_h \to \mathcal{D} \ (h \to 0).$$

Il faut donc pouvoir représenter au mieux la géométrie du domaine étudié, souvent complexe par des éléments finis de forme géométrique simple. Il ne doit y avoir ni recouvrement, ni trou entre deux éléments ayant une frontière commune. De plus, lorsque la frontière du domaine est complexe, une erreur de discrétisation géométrique est inévitable. Cette erreur doit être exprimée et éventuellement réduite en modifiant le forme ou en diminuant la taille des éléments concernés.

3.2 Approximation nodale

La méthode des éléments finis est basée sur la construction systématique d'une approximation U^* (U^* est une fonction qui approxime U) du champ des variables U par sous domaines.

Cette approximation est construite sur les valeurs approchées du champ au nœud de l'élément. On parle de représentation nodale ou simplement d'approximation nodale.

3.2.1 Définition

L'approximation par éléments finis est une approximation nodale par sous domaines ne faisant intervenir que les variables nodales du domaine.

$$\forall M \in \mathcal{D}_e, \quad \{U^*(M)\} = [N[M]]\,\{U_n\}\,,$$

- $\{U^*\}$ est la valeur de la fonction approchée en tout point M de l'élément D_e ;
- $[N]$ matrice des fonctions d'interpolation de l'élément ;
- $\{U_n\}$ variables nodales relatives aux nœuds d'interpolation de l'élément.

3.2.2 Construction nodale

L'approximation nodale est construite à partir d'une approximation générale :

$$\forall M : \quad U^*(M) = \langle \Phi(M) \rangle\,\{a\}\,,$$

- $\langle \Phi(M) \rangle$ est une base de fonctions connues indépendantes ;
- $\{a\}$: est le vecteur de n paramètres de l'approximation.

Les n nœuds M_n sont des points de l'élément pour lesquels l'approximation U^* est identifiée à la valeur du champ de variable.

$$\{U_n\} = \{U^*(M_n)\} = \begin{bmatrix} \Phi(M_1) \\ \vdots \\ \Phi(M_n) \end{bmatrix} \{a\}\ ; \quad \text{avec } [T] = \begin{bmatrix} \Phi(M_1) \\ \vdots \\ \Phi(M_n)\,. \end{bmatrix}$$

Si $[T]$ est inversible, on a

$$\{a\} = [T]^{-1}\,\{U_n\}\,.$$

En reportant ce résultat dans l'approximation, nous obtenons la matrice des fonctions d'interpolation

$$\begin{aligned} U^*(M) &= \langle \Phi(M) \rangle\,[T]^{-1}\,\{U_n\} \\ &= [N(M)]\,\{U_n\}\ ; \quad \text{avec } [N(M)] = \langle \Phi(M) \rangle\,[T]^{-1}. \end{aligned}$$

Base polynomiale

1D
- Linéaire : $\langle 1 \quad x \rangle$;
- Quadratique : $\langle 1 \quad x \quad x^2 \rangle$;

2D
- Linéaire : $\langle 1 \quad x \quad y \rangle$;
- Quadratique : $\langle 1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \rangle$;

3D
- Linéaire : $\langle 1 \quad x \quad y \quad z \rangle$;
- Quadratique : $\langle 1 \quad x \quad y \quad z \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad xz \quad yz \quad z^2 \rangle$.

3.3 Transformation géométrique

3.3.1 Principe des éléments de référence

Le principe consiste à associer à chaque type d'éléments réels un élément unique de forme constante, défini dans un espace de référence $(s,\ t,\ \nu)$ ayant le même nombre de nœuds.

3.3.2 Interpolation sur l'élément de référence

On rappelle qu'en dimension trois, l'interpolation sur l'élément réel d'une fonction $u^*(x, y, z)$ à partir de n valeurs au nœud U_i s'établit par l'expression

$$u^*(x,y,z) = \left\langle N_1^R(x,y,z) \quad \cdots \quad N_n^R(x,y,z) \right\rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix}$$

Toujours en 3D, l'interpolation nodale sur l'élément de référence dans l'espace de coordonnées (s, t, ν) est

$$u^*(s,t,\nu) = \langle N_1(s,t,\nu) \ \cdots \ N_n(s,t,\nu) \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix}$$

où les $N_i(s, t, \nu)$ sont les facteurs d'interpolation sur l'élément de référence.

3.3.3 Fonction forme

L'utilisation d'élément de référence demande la connaissance de la relation entre élément réel et élément de référence. Cette relation est représentée en 3D par trois fonctions

$$x(s,t,\nu)\ , \quad y(s,t,\nu)\ , \quad \text{et} \quad z(s,t,\nu)\,.$$

Les fonctions de forme, notées $\overline{N}_i(s, t, \nu)$, permettent d'établir facilement cette relation entre les deux espaces de coordonnées et ceci pour tout type d'éléments finis.

Pour une transformation en trois dimensions, on a toujours pour un élément à n nœuds :

$$\begin{cases} x(s,t,\nu) &= \left\langle \overline{N}_1(s,t,\nu) \ \cdots \ \overline{N}_n(s,t,\nu) \right\rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \\ y(s,t,\nu) &= \left\langle \overline{N}_1(s,t,\nu) \ \cdots \ \overline{N}_n(s,t,\nu) \right\rangle \begin{Bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} \\ z(s,t,\nu) &= \left\langle \overline{N}_1(s,t,\nu) \ \cdots \ \overline{N}_n(s,t,\nu) \right\rangle \begin{Bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{Bmatrix} \end{cases}$$

3.3.4 Éléments isoparamétriques

Pour la plupart des éléments finis utilisés dans la pratique, les fonctions d'interpolation sur l'élément de référence sont égales aux fonctions formes.

Ces éléments sont appelés ***isoparamétriques***. Nous utiliserons essentiellement les éléments isoparamétriques dans ce cours. Dans ce cas, en dimension trois, on a les résultats suivants :

$$\begin{cases} x(s,t,\nu) &= \langle N_1(s,t,\nu) \ \cdots \ N_n(s,t,\nu)\rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \\ \\ y(s,t,\nu) &= \langle N_1(s,t,\nu) \ \cdots \ N_n(s,t,\nu)\rangle \begin{Bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} \\ \\ z(s,t,\nu) &= \langle N_1(s,t,\nu) \ \cdots \ N_n(s,t,\nu)\rangle \begin{Bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{Bmatrix} \end{cases}$$

avec les N_i les fonctions d'interpolation sur l'élément de référence.

Exemple 3.1. *Pour l'élément de référence, les fonctions d'interpolation sont*

$$N_1(s,t) = 1 - s - t\,; \quad N_2(s,t) = s\,; \quad N_3(s,t) = t\,.$$

Les relations qui lient l'élément de référence aux fonctions formes sont :

$$\begin{cases} x(s,t) &= \Big\langle 1-s-t \quad s \quad t \Big\rangle \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \\ \\ y(s,t) &= \Big\langle 1-s-t \quad s \quad t \Big\rangle \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} \end{cases}$$

En résumé, pour exprimer l'interpolation sur l'élément de référence en dimension 2 et 3, on procède de la manière suivante :

- On exprime l'interpolation sur l'élément de référence (Fiche) ;
- On exprime les relations entre les coordonnées cartésiennes (x,y,z) et (s,t,ν) à l'aide des fonctions N_i, pour obtenir les relations

$$x(s,t,\nu)\ ; \quad y(s,t,\nu)\ ; \quad \text{et} \quad z(s,t,\nu)\ ;$$

- On remplace les relations $s(x,y,z),\ t(x,y,z)$ et $\nu(x,y,z)$ dans l'expression de l'interpolation sur l'élément de référence pour obtenir finalement l'expression de l'interpolation sur l'élément réel.

Exercice 3.1. *Soit un élément triangulaire défini en dimension deux dans le plan (x,y). Les coordonnées des nœuds de l'élément sont les suivantes :*

$$\textit{nœud } 1 :\ (0,0)\,; \quad \textit{nœud } 2 :\ (1,0)\,; \quad \textit{nœud } 3 :\ (1,1).$$

On interpole ensuite un champ de température $T(x,y)$ à l'intérieur de cet élément. Les températures connues sont respectivement $T_1,\ T_2$ et T_3. En passant par l'élément de référence associé à cet élément réel, déterminer l'expression de l'interpolation $T(x,y)$.

Exercice 3.2. *On considère une barre étudiée en transfert de chaleur le long de l'axe x. La barre est définie entre $x = 0$ et $x = 1$. On mesure la température de cette barre en trois points :*

- *nœud 1, pour $x = 0$, on a : $T_1 = 20$;*
- *nœud 2, pour $x = 0.5$, on a : $T_2 = 25$;*
- *nœud 3, pour $x = 1$, on a : $T_3 = 22$.*

On cherche à interpoler à partir de ces mesures, un champ de température $T(x)$ pour $x \in [0, 1]$.

Déterminer l'interpolation $T(x)$ en utilisant un maillage avec un seul élément (1D quadratique) ; la fonction d'interpolation est :

$$\langle N(s) \rangle = \left\langle -\tfrac{1}{2}s(1-s) \quad 1-s^2 \quad \tfrac{1}{2}s(1+s) \right\rangle .$$

3.4 Convergence

On peut garantir dans certaines conditions que la méthode converge vers la solution exacte du problème (tel que modélisé) en déplacement, déformation ou contrainte.

Définition 3.1

On dira que l'on a convergence sur la solution, c'est-à-dire que $u^*(x, y, z)$ tend vers la solution exacte $u_{ex}(x, y, z)$, lorsque l'on fait tendre la taille des éléments vers 0, si on a

$$\lim_{\text{taille}(D_e)\to 0} \|u^*(x, y, z) - u_{ex}(x, y, z)\| = 0,$$

où l'opérateur $\|\cdot\|$ est une norme qui reste à définir.

Définition 3.2

On dira que l'on a la convergence sur les dérivées premières de la solution si on a :

$$\lim_{\text{taille}(D_e)\to 0} \left\| \frac{\partial u^*}{\partial x_i}(x_1, x_2, x_3) - \frac{\partial u_{ex}}{\partial x_i}(x_1, x_2, x_3) \right\| = 0, \quad \text{pour } i \in \{1, 2, 3\} .$$

Théorème 3.1

- *Sur des maillages conformes et réguliers, les tétraèdres linéaires donnent la convergence en énergie en élasticité coercive, donc des déformations et contraintes dans L^2.*
- *Avec les tétraèdres linéaires en élasticité, on a continuité entre élément voisin sur les déplacements, mais pas sur les déformations et les contraintes.*
- *Les tétraèdres quadratiques à 10 nœuds améliorent l'approximation des déplacements, mais ne garantissent pas la continuité des déformations ni des contraintes entre éléments.*

Chapitre 4

Matrices de rigidités locales et vecteurs forces locaux

4.1 Découpage de la forme intégrale

On procède à la discrétisation de la forme intégrale faible en procédant de la façon suivante. C'est-à-dire le découpage en intégrales sur les éléments et l'introduction de l'interpolation nodale qui a pour objet de faire apparaître dans la formulation, les valeurs du champ de solution recherchée au nœud du maillage.

Ainsi, on procède à la discrétisation de la forme intégrale, en écrivant que les intégrales sur le domaine V et la surface S_f sont la sommation d'intégrale sur chaque élément.

$$\begin{aligned} W &= -\iiint_V \langle \delta\varepsilon \rangle \cdot \{\sigma\} \, \mathrm{d}v + \iiint_V \langle \delta u \rangle \cdot \{F_v\} \, \mathrm{d}v + \oiint_{S_f} \langle \delta u \rangle \cdot \{f_s\} \, \mathrm{d}s \\ &= \sum_{i=1}^{N} W_{(i)} = 0 \end{aligned}$$

avec

$$W_{(i)} = -\iiint_{V(i)} \langle \delta\varepsilon \rangle \cdot \{\sigma\} \, \mathrm{d}v + \iiint_{V(i)} \langle \delta u \rangle \cdot \{F_v\} \, \mathrm{d}v + \oiint_{S_f(i)} \langle \delta u \rangle \cdot \{f_s\} \, \mathrm{d}s.$$

Comme $\{\sigma\} = [H] \cdot \{\varepsilon\}$, donc

$$W_i = -\iiint_{V(i)} \langle \delta\varepsilon \rangle \, [H] \, \{\varepsilon\} \, \mathrm{d}v + \iiint_{V(i)} \langle \delta u \rangle \, \{F_v\} \, \mathrm{d}v + \oiint_{S_f(i)} \langle \delta u \rangle \, \{f_s\} \, \mathrm{d}s.$$

On introduit maintenant l'interpolation nodale du champ de solution recherchée.

Soit n le nombre de nœuds de l'élément (i) $\{U\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}$;

$$u = \langle N_1 \quad \cdots \quad N_n \rangle \begin{Bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{Bmatrix} ; \quad v = \langle N_1 \quad \cdots \quad N_n \rangle \begin{Bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{Bmatrix} ; \quad w = \langle N_1 \quad \cdots \quad N_n \rangle \begin{Bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{Bmatrix}$$

On introduit le vecteur $\langle U_{n(i)} \rangle$:

$$\langle U_{n(i)} \rangle = \langle u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \cdots \quad u_n \quad v_n \quad w_n \rangle ; \qquad \{U\} = [N] \left\{ U_{n(i)} \right\},$$

avec

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & N_3 & \cdots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix}$$

De cette expression, on tire

$$\{\delta U\} = [N] \cdot \left\{\delta U_{n(i)}\right\}$$

$$\langle \delta U \rangle = {}^t\{\delta U\} = {}^t\left([N] \cdot \left\{\delta U_{n(i)}\right\}\right) = \left\langle \delta U_{n(i)} \right\rangle {}^t[N]$$

$$\left\langle \delta U_{n(i)} \right\rangle = \begin{pmatrix} \delta u_1 & \delta v_1 & \delta w_1 & \cdots & \delta u_n & \delta v_n & \delta w_n \end{pmatrix}$$

Matrice B

L'interpolation nodale conduit également à la définition de la matrice B telle que

$$\{\varepsilon\} = [B] \cdot \left\{U_{n(i)}\right\}.$$

La matrice B est une matrice de taille $6 \times 3n$ (avec n le nombre de nœud) qui est globalement formé avec les termes de la matrice $[J]$ (à définir). Ainsi

$$\langle \varepsilon \rangle = {}^t\{\varepsilon\} = {}^t\left([B] \cdot \left\{U_{n(i)}\right\}\right) = \left\langle U_{n(i)} \right\rangle {}^t[B],$$

de même

$$\langle \delta\varepsilon \rangle = \left\langle \delta U_{n(i)} \right\rangle {}^t[B].$$

Matrice de rigidité locale et vecteur force local

On a donc

$$\begin{aligned} W_{(i)} &= -\iiint_{V(i)} \left\langle \delta U_{n(i)} \right\rangle {}^t[B][H][B] \left\{U_{n(i)}\right\} \mathrm{d}v + \iiint_{V(i)} \left\langle \delta U_{n(i)} \right\rangle {}^t[N] \left\{F_v\right\} \mathrm{d}v \\ &\quad + \oiint_{S_f(i)} \left\langle \delta U_{n(i)} \right\rangle {}^t[N] \left\{f_s\right\} \mathrm{d}s \\ &= \left\langle \delta U_{n(i)} \right\rangle \left[-\iiint_{V(i)} {}^t[B][H][B] \left\{U_{n(i)}\right\} \mathrm{d}v + \iiint_{V(i)} {}^t[N] \left\{F_v\right\} \mathrm{d}v + \oiint_{S_f(i)} {}^t[N] \left\{f_s\right\} \mathrm{d}s \right] \\ &= \left\langle \delta U_{n(i)} \right\rangle \left[\left(-\iiint_{V(i)} {}^t[B][H][B] \, \mathrm{d}v \right) \left\{U_{n(i)}\right\} + \iiint_{V(i)} {}^t[N] \left\{F_v\right\} \mathrm{d}v + \oiint_{S_f(i)} {}^t[N] \left\{f_s\right\} \mathrm{d}s \right] \end{aligned}$$

Posons

$$[K_i] = \iiint_{V(i)} {}^t[B][H][B] \, \mathrm{d}v\,, \qquad \text{et} \qquad \{F_i\} = \iiint_{V(i)} {}^t[N] \left\{F_v\right\} \mathrm{d}v + \oiint_{S_f(i)} {}^t[N] \left\{f_s\right\} \mathrm{d}s\,;$$

alors W_i devient

$$W_i = \left\langle \delta U_{n(i)} \right\rangle \left[-[K_i] \left\{U_{n(i)}\right\} + \{F_i\} \right].$$

Définition 4.1

La matrice $[K_i]$ est appelée ***matrice de rigidité locale*** *pour l'élément (i) et vaut*

$$[K_i] = \iiint_{V(i)} {}^t[B][H][B]\,\mathrm{d}v.$$

Le vecteur $\{F_i\}$ est appelé ***vecteur force local*** *pour l'élément (i) et vaut*

$$\{F_i\} = \iiint_{V(i)} {}^t[N]\,\{F_v\}\,\mathrm{d}v + \oiint_{S_{f(i)}} {}^t[N]\,\{f_s\}\,\mathrm{d}s.$$

Remarque 4.1. *1. La matrice $[K_i]$ est toujours symétrique en élasticité.*

2. Le vecteur $\{F_i\}$ est constitué de deux termes, le premier terme représente la contribution des forces de volume au vecteur force et le second terme représente la contribution des forces de surface au vecteur force.

4.2 Matrice Jacobienne $[J]$

Les relations de la transformation géométrique en 3D est égale à

$$\begin{cases} x(s,t,\nu) &= \left\langle N_1 \quad \cdots \quad N_n \right\rangle \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} \\ y(s,t,\nu) &= \left\langle N_1 \quad \cdots \quad N_n \right\rangle \cdot \begin{Bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{Bmatrix} \\ z(s,t,\nu) &= \left\langle N_1 \quad \cdots \quad N_n \right\rangle \cdot \begin{Bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{Bmatrix} \end{cases}$$

On en déduit que l'on peut exprimer $\dfrac{\partial x}{\partial s}$ par

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \left\langle \tfrac{\partial N_1}{\partial s} \quad \cdots \quad \tfrac{\partial N_n}{\partial s} \right\rangle \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}.$$

Cela amène à une nouvelle définition de la matrice Jacobienne qui est particulière à l'élément fini :

$$[J] = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial \nu} \end{Bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \\ \frac{\partial x}{\partial \nu} & \frac{\partial y}{\partial \nu} & \frac{\partial z}{\partial \nu} \end{bmatrix}$$

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial s} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial s} \\ \frac{\partial N_1}{\partial t} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial t} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \nu} & \dots & \frac{\partial N_n}{\partial \nu} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & z_n \end{bmatrix}$$

La relation inverse permet alors de calculer les dérivées premières par rapport aux coordonnées réelles des fonctions d'interpolation.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{Bmatrix} = [J^{-1}] \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \\ \frac{\partial}{\partial \nu} \end{Bmatrix}$$

Connaissant les dérivées premières

$$\frac{\partial N_i}{\partial s}, \quad \frac{\partial N_i}{\partial t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial N_i}{\partial \nu}$$

ces relations participent à la construction de la matrice $[B(s,t,\nu)]$ à partir de la matrice $[B(x,y,z)]$, qui s'exprime en fonction des dérivées premières

$$\frac{\partial N_i^R}{\partial x}, \quad \frac{\partial N_i^R}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial N_i^R}{\partial z}.$$

Pour le calcul des dérivées secondes

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \dots$$

des fonctions d'interpolation (problème de flexion), la démarche est identique, mais les calculs sont plus complexes.

Calcul numérique des intégrales

$$\iiint_{V(i)} f(x,y,z)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{Dr(i)} f(s,t,\nu)\,.\,|\det[J]|\ \mathrm{d}s\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}\nu$$

Exercice 4.1. *On considère une barre définie le long de l'axe x, entre x_1 et x_2.*

Les paramètres caractérisant le matériau et la géométrie de la barre sont les suivants :

- *ρ est la masse volumique du matériau ;*
- *E est le module de Young du matériau ;*
- *A est la section de la barre ;*
- *L est la longueur de la barre.*

On considère deux types de chargement à la barre (F_1 et F_2) et ensuite une force par unité de longueur $q(x)$ répartie le long de la barre. L'équation d'équilibre est donnée par :

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(AE\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\right) + q(x) = 0 \\ \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x_1) = \frac{-F_1}{AE} = \varepsilon_x \\ \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}(x_2) = \frac{F_2}{AE} = \varepsilon_x \end{cases}$$

1. *Déterminer les formulations forte et faible par hypothèse de Galerkine pour le problème.*
2. *Déterminer la matrice de rigidité locale et le vecteur force local de l'élément barre.*

Chapitre 5

Expansion – Assemblage – Résolution

5.1 Représentation du maillage

Définition 5.1

- *Le nombre d'élément du maillage est noté N.*
- *Le nombre de nœud du maillage est noté N_d.*
- *Le nombre de nœud par élément est noté n.*

5.1.1 Table de nœud

Indice du nœud	Coordonnées x	Coordonnées y	Coordonnées z
1	x_1	y_1	z_1
2	x_2	y_2	z_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
N_d	x_{N_d}	y_{N_d}	z_{N_d}

La table des nœuds contient tout simplement les coordonnées cartésiennes des nœuds sous la forme ci-dessus. Le numéro de nœud de cette table (allant de 1 à N_d) est un numéro global du nœud au sein du maillage, qu'il ne faut pas confondre avec l'indice d'un nœud au sein d'un élément.

5.1.2 Table de connectivité

Cette table représente essentiellement la manière dont les nœuds de la liste précédente sont reliés les uns aux autres pour former des éléments.

On considère ici, pour simplifier, que tous les éléments sont du même type et donc qu'ils ont tous le même nombre de nœuds.

Cette table se présente sous la forme d'un tableau à deux entrées CONNEC (i, j) ; où i (indice de ligne du tableau) correspond à l'indice de l'élément considéré (et donc i varie entre 1 et N), et j (indice de colonne) correspond à l'indice du nœud au sein de l'élément (et donc varie entre 1 et n).

Ensuite, le contenu du tableau est la liste des numéros des nœuds qui forment l'élément i.

5.2 Matrice de rigidité et vecteurs forces locaux

5.2.1 Principe

On a : $W(i) = \langle \delta U_{n(i)} \rangle \left[[-K(i)] \{U_{n(i)}\} + \{F_i\} \right]$.

De manière générale, la taille des matrices de rigidité locale est

$$(n \times NDDL) \times (n \times NDDL)$$

où

- n est le nombre de nœud par élément ;
- $NDDL$ est le nombre de degré de liberté par nœud.

Définition 5.2 (*Les degrés de liberté au nœud*)

Pour les éléments volumiques classiques (tétraèdres et hexaèdres, par exemple), on a $NDDL = 3$. Ce qui correspond aux composantes de déplacement dans les trois directions de l'espace.
Certains éléments peuvent également avoir (c'est le cas des éléments finis poutres et des coques, par exemple) des degrés de liberté connu en rotation.

Règle 5.1.

1. *La taille des matrices de rigidité locales est : $(n \times NDDL) \times (n \times NDDL)$.*
2. *La taille des vecteurs forces locaux est : $n \times NDDL$.*
3. *La taille des matrices de rigidité globales et des matrices de rigidité locales expansées est : $(N_d \times NDDL) \times (N_d \times NDDL)$.*
4. *La taille des vecteurs forces globales et des vecteurs forces locaux expansés est : $N_d \times NDDL$.*

5.2.2 Vecteur de localisation

On définit pour chaque élément du maillage, un vecteur de localisation noté : $\langle \mathrm{LOC}_{(i)} \rangle$ pour l'élément (i).

Cet outil permet facilement d'envoyer les termes des matrices locales et vecteurs locaux au bon endroit dans les matrices locales expansées et vecteurs locaux expansés. La taille de ces vecteurs de localisation est : $n \times NDDL$.

La K^{e} composante du vecteur de localisation de l'élément (i) est définie grâce à la formule

$$\mathrm{LOC}_{(i)}(k) = (\text{numéro nœud global} - 1)\, NDDL + \text{indice ddl},$$

où indice ddl est l'indice du degré du nœud considéré, il varie donc entre 1 et $NDDL$.

On forme les valeurs des composantes du vecteur de localisation de l'élément (i) en bouclant sur les nœuds de l'élément (i), et sur les degrés de liberté de chaque nœud selon l'algorithme.

Dans cet algorithme, k correspond à l'indice du composant du vecteur de localisation et sera incrémenté de 1 à $n \times NDDL$.

Algorithme 5.1 (*Formation du vecteur de localisation pour l'élément* (i))

$k = 1$
Pour j *allant de* 1 *à* n
    Pour l *allant de* 1 *à* $NDDL$
        $\mathrm{LOC}_{(i)}(k) = (\mathrm{CONNEC}(i,j) - 1) \times NDDL + l$
        $k = k + 1$
    Fin Pour
Fin Pour

5.2.3 Utilisation des vecteurs de localisation

Comme mentionné ci-dessous, on utilise les vecteurs de localisation pour former les matrices et les vecteurs locaux expansés.

Définition 5.3

On utilise, dans la suite du texte, les notations suivantes :

- $[K_i]$ *est la matrice de rigidité locale de l'élément* (i) *;*
- $\{F_i\}$ *est le vecteur force local pour l'élément* (i) *;*
- $[K_i^e]$ *est la matrice de rigidité locale expansée pour l'élément* (i) *;*
- $\{F_i^e\}$ *est le vecteur force local expansé pour l'élément* (i)*.*

On commence par initialiser toutes les composantes des matrices locales expansées et des vecteurs locaux expansés à 0.

Algorithme 5.2 (*Formation du vecteur local expansé pour l'élément* (i))

Pour k *allant de* 1 *à* $n \times NDDL$
    $F_i^e\left(\mathrm{LOC}_{(i)}(k)\right) = F_{(i)}(k)$
Fin Pour

Exemple 5.1.

Algorithme 5.3 (*Formation de la matrice local expansé pour l'élément* (i))

Pour k *allant de* 1 *à* $n \times NDDL$
    Pour l *allant de* 1 *à* $n \times NDDL$
        $K_i^e\left(\mathrm{LOC}_{(i)}(k)\,,\,\mathrm{LOC}_{(i)}(l)\right) = K_{(i)}(k,l)$
    Fin Pour
Fin Pour

Le terme à l'intersection de la ligne k et la colonne l de $\left[K_{(i)}\right]$ est envoyé à l'intersection de la ligne $\mathrm{LOC}_{(i)}(k)$ et de la colonne $\mathrm{LOC}_{(i)}(l)$ de $\left[K^e_{(i)}\right]$.

Exemple 5.2.

5.2.4 Utilisation des matrices et vecteurs expansés

De cette manière, la contribution de chaque (i) à la forme intégrale faible peut maintenant s'écrire

$$W_{(i)} = \langle \delta U_{N_d} \rangle \left[- \left[K^e_{(i)}\right] \{U_{N_d}\} + \left\{F^e_{(i)}\right\} \right],$$

où le vecteur $\{U_{N_d}\}$ est tel que

$$\langle U_{N_d} \rangle = \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & \cdots & u_{N_d} & v_{N_d} & w_{N_d} \end{pmatrix}.$$

Ce vecteur regroupe tout simplement toutes les composantes des déplacements au nœud du maillage. On a globalement

$$\langle \delta U_{N_d} \rangle = \begin{pmatrix} \delta u_1 & \delta v_1 & \delta w_1 & \cdots & \delta u_{N_d} & \delta v_{N_d} & \delta w_{N_d} \end{pmatrix}.$$

Matrice de rigidité globale et vecteur force global

On a :

$$\begin{aligned} W = \sum_{i=1}^{N} W_{(i)} = 0 \implies & \sum_{i=1}^{N} \left[\langle \delta U_{N_d} \rangle \left(- \left[K^e_{(i)}\right] \{U_{N_d}\} + \{F^e_i\} \right) \right] = 0 \\ \iff & \langle \delta U_{N_d} \rangle \left[\sum_{i=1}^{N} - \left[K^e_{(i)}\right] \{U_{N_d}\} + \sum_{i=1}^{N} \{F^e_i\} \right] = 0. \end{aligned}$$

Et finalement, on introduit $[K]$ et $\{F\}$, ce qui donne

$$\sum_{i=1}^{N} W_{(i)} = \langle \delta U_{N_d} \rangle \left[-[K] \{U_{N_d}\} + \{F\} \right].$$

Règle 5.2. *On calcule la matrice de rigidité globale $[K]$ et le vecteur force global $\{F\}$ à partir des matrices de rigidité locales expansées $\left[K^e_{(i)}\right]$ et les vecteurs forces locaux expansés $\{F^e_i\}$ de la manière suivante :*

$$[K] = \sum_{i=1}^{N} \left[K^e_{(i)}\right] \qquad et \qquad \{F\} = \sum_{i=1}^{N} \left\{F^e_{(i)}\right\}.$$

5.2.5 Particularités du système final

Ici, on a un système linéaire particulier puisque :

$$-[K]\{U_{N_d}\} + \{F\} = 0 \Longleftrightarrow [K]\{U_{N_d}\} = \{F\}\,.$$

- La matrice $[K]$ est complétement connue.
- Le vecteur $\{U_{N_d}\}$ est majoritairement inconnu, car on impose des déplacements et donc certaines composantes de $\{U_{N_d}\}$ sont connues.
- Le vecteur $\{F\}$ est majoritairement connu, car les seules composantes de $\{F\}$ qui sont inconnues sont les composantes correspondant au déplacement imposé.

En général, les déplacements imposés correspondent aux appuis.

Chapitre 6

Application à l'élasticité linéaire

6.1 Application de la forme générale à un élément barre

On considère l'exercice 1 sur l'élément barre.

Nous avons vu que la forme générale de la matrice de rigidité locale et le vecteur force local est

$$\left[K_{(i)}\right] = \int_{V(i)} {}^t[B][H][B]\,\mathrm{d}v \qquad \text{et} \qquad \left\{F_{(i)}\right\} = \int_{V(i)} {}^t[N]\left\{F_v\right\}\,\mathrm{d}v + \oint_{S_f(i)} {}^t[N]\left\{f_s\right\}\,\mathrm{d}s.$$

Nous allons maintenant appliquer la forme générale de ces équations à l'élément barre.

6.1.1 Calcul de $[H]$

On a

$$\langle\varepsilon\rangle = \begin{pmatrix}\varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \langle\sigma\rangle = \begin{pmatrix}\sigma_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

donc

$$\langle\delta\varepsilon\rangle\left\{\sigma\right\} = \delta\varepsilon_x \cdot \sigma_x.$$

Ainsi, pour simplifier, on considère ici que les vecteurs lignes $\langle\varepsilon\rangle$ et $\langle\sigma\rangle$ se réduisent à des scalaires :

$$\langle\varepsilon\rangle = \varepsilon_x \qquad \text{et} \qquad \langle\sigma\rangle = \sigma_x.$$

Ainsi $[H] = E$.

6.1.2 Calcul de la matrice $[B]$

On rappelle que la matrice $[B]$ est telle que

$$\left\{\varepsilon\right\} = [B]\left\{U_{n(i)}\right\},$$

avec le vecteur $\left\langle U_{N(i)}\right\rangle$ qui est ici égal à $\left\langle U_{n(i)}\right\rangle = \begin{pmatrix}U_1 & U_2\end{pmatrix}$.

On introduit ici la matrice $\left[J^{-1}\right]$ telle que

$$\left\{\varepsilon\right\} = \left[J^{-1}\right]\left\{\varepsilon_s\right\} \qquad \text{avec} \qquad \left\{\varepsilon_s\right\} = \left\{\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}s}\right\}.$$

Ici $[J] = \dfrac{L}{2}$ donc $\left[J^{-1}\right] = \dfrac{2}{L}$.

On introduit ensuite la matrice $[B_s]$ telle que :

$$\langle \varepsilon_s \rangle = [B_s] \cdot \left\{U_{n(i)}\right\} \quad \text{et} \quad \{\varepsilon_s\} = \left\{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\right\}; \quad \text{avec} \quad u(s) = \begin{pmatrix} N_1(s) & N_2(s) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \{\varepsilon_s\} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}s} & \frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}s} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

donc

$$[B_s] = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}s} & \frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}s}. \end{pmatrix}$$

Comme

$$N_1(s) = \frac{1-s}{2} \quad \text{et} \quad N_2(s) = \frac{1+s}{2}, \quad \text{il vient} \quad [B_s] = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Or

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} = [B] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} &= \left[J^{-1}\right] \{\varepsilon_s\} \\ &= \left[J^{-1}\right] [B_s] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$[B] = \left[J^{-1}\right] [B_s]$$

et dans le cadre de l'application

$$[B] = \frac{2}{L} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{L} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \langle N(x) \rangle &= \begin{pmatrix} N_1\left(\frac{2x-x_2-x_1}{L}\right) & N_2\left(\frac{2x-x_2-x_1}{L}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{L-2x+x_2+x_1}{2L} & \frac{L+2x-x_2-x_1}{2L} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ici, la force répartie $q(x)$ est considérée comme une force de volume qui est égale à

$$\{F_v\} = \frac{q(x)}{A}$$

Pour ce qui est du deuxième terme : $\oint_{S_f(i)} {}^t[N] \{f_s\} \, \mathrm{d}s$.

Il n'y a pas d'effort de pression de surface appliquée, et donc $\{f_s\} = 0$. Cela conduit donc à notre force $\{F_i\}$ qui est égale à

$$\begin{aligned} \{F_i\} &= \int_{V(i)} {}^t[N] \{F_v\} \, \mathrm{d}v + \oint_{S_f(i)} {}^t[N] \{f_s\} \, \mathrm{d}s + \{F_1, F_2\}^t \\ &= \int_{V(i)} {}^t[N] \frac{q(x)}{A} \, \mathrm{d}v + \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{A} \int_{V(i)} \begin{pmatrix} \frac{1}{2L}(L - 2x + x_2 + x_1) \\ \\ \frac{1}{2L}(L + 2x - x_2 - x_1) \end{pmatrix} q(x) \, \mathrm{d}v + \{F_1, F_2\}^t. \end{aligned}$$

6.2 Élément poutre

6.2.1 Élément poutre en flexion uniquement

Introduction

On considère maintenant une poutre définie le long de l'axe x, entre x_1 et x_2, ne travaillant qu'en flexion ; c'est-à-dire que l'on n'a pas de chargement sur cette poutre qui induit un effort normal, mais uniquement un effort tranchant et un moment fléchissant.

Les paramètres caractérisant le matériau et la géométrie de la barre sont les suivants :

- I est le moment d'inertie de la section de la poutre ;
- E est le module de Young du matériau ;
- A est la section de la poutre ;
- L est la longueur de la poutre.

On considère deux (02) types de chargement appliqués à la poutre tel que illustrés. D'abord les forces ponctuelles F_1 et F_2, verticales (positives vers le haut) appliquées aux deux extrémités et ensuite les moments ponctuels M_1 et M_2 appliquées aux deux extrémités (positifs dans le sens trigonométrique anti-horaire).

Équations fondamentales

La solution recherchée est $v(x)$ (pour $x \in [x_1, x_2]$), le champ de déplacement vertical (positif vers le haut), le long de l'axe x. On considère également dans la résolution, la dérivée de $v(x)$ qui correspond physiquement, lorsque la poutre fléchit, à la rotation de la section de la poutre au point de coordonnées x. Cette rotation, anti-horaire, est classiquement notée

$$\theta(x) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

Ce phénomène physique, avec les hypothèses mentionnées ci-dessus, est décrit par l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(EI\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}\right) = 0,$$

et, pour E et I constantes, on a

$$EI\frac{\mathrm{d}^4v}{\mathrm{d}x^4} = 0.$$

Les conditions aux limites, imposées par l'application des forces F_1 et F_2, ainsi que les moments M_1 et M_2, se traduisent de la manière suivante :

on rappelle que l'expression du moment fléchissant le long de l'axe x est

$$M(x) = EI\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}$$

et que l'expression de l'effort tranchant le long de l'axe x est

$$V(x) = -\frac{dM}{\mathrm{d}x}, \qquad i.e. \qquad V(x) = -EI\frac{\mathrm{d}^3v}{\mathrm{d}x^3}\,.$$

Sur la surface, on a

$$V = -F_1 \qquad \text{et} \qquad M = -M_1\,,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}(x_1) = F_1 \Longleftrightarrow EI\frac{\mathrm{d}^3v}{\mathrm{d}x^3}(x_1) = F_1$$
$$\Longrightarrow\ M(x_1) = EI\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}(x_1) = -M_1\ \Longrightarrow\ \frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}(x_1) = -\frac{M_1}{EI}.$$

De même, sur la face droite, on a :

$$\frac{\mathrm{d}^3v}{\mathrm{d}x^3}(x_2) = -\frac{F_2}{EI} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}(x_2) = \frac{M_2}{EI}.$$

La forme intégrale forte est donnée par

$$EI\int_{x_1}^{x_2}\psi\left(\frac{\mathrm{d}^4v}{\mathrm{d}x^4}(x)\right)\mathrm{d}x = 0, \quad \forall\psi:\ \text{fonction de pondération.}$$

La forme intégrale faible

$$W = EI\int_{x_1}^{x_2}\psi\left(\frac{\mathrm{d}^4v}{\mathrm{d}x^4}(x)\right)\mathrm{d}x = EI\left(-\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^3v}{\mathrm{d}x^3}\,\mathrm{d}x + \left[\psi\frac{\mathrm{d}^3v}{\mathrm{d}x^3}(x)\right]_{x_1}^{x_2}\right)$$

$$= -EI\left(\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^3v}{\mathrm{d}x^3}\,\mathrm{d}x - \left[\psi\frac{\mathrm{d}^3v}{\mathrm{d}x^3}(x)\right]_{x_1}^{x_2}\right)$$

$$= -EI\left(-\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x + \left[\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}(x)\right]_{x_1}^{x_2} - \left[\psi\frac{\mathrm{d}^3v}{\mathrm{d}x^3}(x)\right]_{x_1}^{x_2}\right)$$

$$= EI\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x - EI\left[\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}(x)\right]_{x_1}^{x_2} + EI\left[\psi\frac{\mathrm{d}^3v}{\mathrm{d}x^3}(x)\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$= EI\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x - EI\left(\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}(x_2)\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}(x_2) - \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}(x_1)\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}(x_1)\right)$$
$$+ EI\left(\psi(x_2)\frac{\mathrm{d}^3v}{\mathrm{d}x^3}(x_2) - \psi(x_1)\frac{\mathrm{d}^3v}{\mathrm{d}x^3}(x_1)\right)$$

$$= EI\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x - \left(M_2\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}(x_2) + M_1\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}(x_1)\right) + \left(-F_2\psi(x_2) - F_1\psi(x_1)\right).$$

Ainsi donc, la forme intégrale faible est

$$W = EI\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}x^2}\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x - \left(M_2\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}(x_2) + M_1\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x}(x_1)\right) - \left(F_2\psi(x_2) + F_1\psi(x_1)\right) = 0.$$

Forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkine

$$\psi = \delta v, \qquad \delta\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(\delta v)$$

$$W = EI\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(\delta v)\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x - M_2\delta\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}(x_2)\right) - M_1\delta\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}(x_1)\right) - F_2\delta v(x_2) - F_1\delta v(x_1).$$

Posons $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}(x_2) = \theta(x_2)$ et $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}(x_1) = \theta(x_1)$.

La forme intégrale faible avec hypothèse de Galerkine est donc

$$W = EI \int_{x_1}^{x_2} \frac{\mathrm{d}^2(\delta v)}{\mathrm{d}x^2} \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x - \begin{pmatrix} \delta v(x_1) & \delta v(x_2) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} - \begin{pmatrix} \delta\theta(x_1) & \delta\theta(x_2) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = 0$$

Maillage et passage de l'élément de référence

La matrice Jacobienne dans ce cas est identique à la matrice Jacobienne de l'élément barre

$$[J] = \frac{1}{2}(x_2 - x_1) = \frac{L}{2}\,; \qquad \det[J] = \frac{L}{2} \qquad \text{et} \qquad \left[J^{-1}\right] = \frac{2}{L}.$$

Ce qui donne pour la transformation des dérivées

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \left[J^{-1}\right] \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} \qquad \text{sachant que} \qquad \frac{\partial}{\partial x} = \left[J^{-1}\right] \frac{\partial}{\partial s} \\ \Longrightarrow \quad & \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right) = \left[J^{-1}\right] \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[[J]^{-1} \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}\right] \\ \text{donc} \quad & \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = \frac{4}{L^2} \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}s^2}\,. \end{aligned}$$

En appliquant la transformation de l'intégrale avec $\mathrm{d}x = \dfrac{L}{2}\mathrm{d}s,\ \mathrm{d}x = \det[J]\,\mathrm{d}s$, il vient

$$W_{(i)} = \frac{8}{L^3} EI \int_{-1}^{1} \delta\left(\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}s^2}\right)\left(\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}s^2}\right) \mathrm{d}s - \begin{pmatrix} \delta\theta(-1) & \delta\theta(1) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} - \begin{pmatrix} \delta v(-1) & \delta v(1) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix}$$

avec

$$\frac{\mathrm{d}^2(\delta v)}{\mathrm{d}x^2} \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x = \delta\left(\frac{4}{L^2} \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}s^2}\right) \times \frac{4}{L^2} \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}s^2} \times \frac{L}{2}\,\mathrm{d}s.$$

Introduction à l'interpolation nodale

Ensuite, la grande particularité c'est que cet élément n'est pas isoparamétrique car on introduit une interpolation qui n'est pas de degré 1.

On introduit donc une interpolation particulière $v(s)$ qui est égale à

$$v(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3.$$

On introduit ensuite dans l'interpolation les grandeurs nodales (aux nœuds) $v_1,\ \theta_1,\ v_2,\ \theta_2$.

Pour que l'interpolation soit cohérente, on doit avoir

$$v(-1) = v_1, \quad v(1) = v_2, \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}(x_1) = \theta(x_1) = \theta_1, \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}(x_2) = \theta(x_2) = \theta_2.$$

En remarquant que $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}(x_1) = \dfrac{2}{L}\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}$, cela donne

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}(x_1) = \frac{2}{L}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}(-1) = \theta_1 \implies \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}(-1) = \frac{L}{2}\theta_1 \\ & \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}(x_2) = \frac{2}{L}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}(1) = \theta_2 \implies \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}(1) = \frac{L}{2}\theta_2. \end{aligned}$$

Ces conditions sont introduites dans l'interpolation, et donnent alors

$$\left\{\begin{array}{rcll} v(-1) & = & v_1 & = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \\ v(1) & = & v_2 & = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}(-1) & = & \frac{L}{2}\theta_1 & = a_1 - 2a_2 + 3a_3 \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s}(1) & = & \frac{L}{2}\theta_2 & = a_1 + 2a_2 + 3a_3 \end{array}\right. \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \frac{L}{2}\theta_1 \\ v_2 \\ \frac{L}{2}\theta_2 \end{pmatrix}$$

notant

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

il s'ensuit

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = D^{-1} \begin{pmatrix} v_1 \\ \frac{L}{2}\theta_1 \\ v_2 \\ \frac{L}{2}\theta_2 \end{pmatrix}, \qquad \text{et} \qquad V(s) = \begin{pmatrix} 1 & s & s^2 & s^3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} i.e. \quad V(s) &= \begin{pmatrix} 1 & s & s^2 & s^3 \end{pmatrix} D^{-1} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \frac{L}{2}\theta_1 \\ v_2 \\ \frac{L}{2}\theta_2 \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(v_1 + v_2) - \frac{L}{8}(\theta_2 - \theta_1) + \left[\frac{3}{4}(v_2 - v_1) - \frac{L}{8}(\theta_1 + \theta_2)\right] s \\ &+ \frac{L}{8}(\theta_2 - \theta_1) s^2 + \left[-\frac{1}{4}(v_2 - v_1) + \frac{L}{8}(\theta_1 + \theta_2)\right] s^3 \end{aligned}$$

On a finalement cette interpolation

$$V(s) = \begin{pmatrix} N_1(s) & N_2(s) & N_3(s) & N_4(s) \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{rcl} N_1(s) & = & \frac{1}{2} - \frac{3}{4}s + \frac{1}{4}s^3 \\ N_2(s) & = & \frac{L}{8} - \frac{L}{8}s - \frac{L}{8}s^2 + \frac{L}{8}s^3 \\ N_3(s) & = & \frac{1}{2} + \frac{3}{4}s - \frac{1}{4}s^3 \\ N_4(s) & = & -\frac{L}{8} - \frac{L}{8}s + \frac{L}{8}s^2 + \frac{L}{8}s^3 \end{array}\right.$$

On peut également remarquer que l'on a

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s} = \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}s} & \frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}s} & \frac{\mathrm{d}N_3}{\mathrm{d}s} & \frac{\mathrm{d}N_4}{\mathrm{d}s} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

Ce qui donne ensuite

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}s^2} = \left\langle \frac{\mathrm{d}^2 N_1}{\mathrm{d}s^2} \quad \frac{\mathrm{d}^2 N_2}{\mathrm{d}s^2} \quad \frac{\mathrm{d}^2 N_3}{\mathrm{d}s^2} \quad \frac{\mathrm{d}^2 N_4}{\mathrm{d}s^2} \right\rangle \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

avec

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}s}(s) &= -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}s^2 \\ \frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}s}(s) &= -\frac{L}{8} - \frac{L}{4}s + \frac{3}{8}Ls^2 \\ \frac{\mathrm{d}N_3}{\mathrm{d}s}(s) &= \frac{3}{4} - \frac{3}{4}s^2 \\ \frac{\mathrm{d}N_4}{\mathrm{d}s}(s) &= -\frac{L}{8} + \frac{L}{4}s + \frac{3}{8}Ls^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \frac{\mathrm{d}^2 N_1}{\mathrm{d}s^2}(s) &= \frac{3}{2}s \\ \frac{\mathrm{d}^2 N_2}{\mathrm{d}s^2}(s) &= -\frac{L}{4} + \frac{3}{4}Ls \\ \frac{\mathrm{d}^2 N_3}{\mathrm{d}s^2}(s) &= -\frac{3}{2}s \\ \frac{\mathrm{d}^2 N_4}{\mathrm{d}s^2}(s) &= \frac{L}{4} + \frac{3}{4}Ls \end{cases}$$

$$\delta\left(\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}s^2}\right) = \left\langle \delta v_1 \quad \delta\theta_1 \quad \delta v_2 \quad \delta\theta_2 \right\rangle \begin{Bmatrix} \frac{\mathrm{d}^2 N_1}{\mathrm{d}s^2} \\ \frac{\mathrm{d}^2 N_2}{\mathrm{d}s^2} \\ \frac{\mathrm{d}^2 N_3}{\mathrm{d}s^2} \\ \frac{\mathrm{d}^2 N_4}{\mathrm{d}s^2} \end{Bmatrix}$$

De même

$$\delta V_1.F_1 = \left\langle \delta v_1 \quad \delta\theta_1 \quad \delta v_2 \quad \delta\theta_2 \right\rangle \begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\delta v_2.F_2 = \left\langle \delta v_1 \quad \delta\theta_1 \quad \delta v_2 \quad \delta\theta_2 \right\rangle \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\delta\theta_1 M_1 = \left\langle \delta v_1 \quad \delta\theta_1 \quad \delta v_2 \quad \delta\theta_2 \right\rangle \begin{Bmatrix} 0 \\ M_1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\delta\theta_2 M_2 = \left\langle \delta v_1 \quad \delta\theta_1 \quad \delta v_2 \quad \delta\theta_2 \right\rangle \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

$$\implies W_{(i)} = \frac{8EI}{L^3}\int_{-1}^{1} \begin{pmatrix}\delta v_1 & \delta\theta_1 & \delta v_2 & \delta\theta_2\end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\mathrm{d}^2 N_1}{\mathrm{d}s^2} \\ \frac{\mathrm{d}^2 N_2}{\mathrm{d}s^2} \\ \frac{\mathrm{d}^2 N_3}{\mathrm{d}s^2} \\ \frac{\mathrm{d}^2 N_4}{\mathrm{d}s^2} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}^2 N_1}{\mathrm{d}s^2} & \frac{\mathrm{d}^2 N_2}{\mathrm{d}s^2} & \frac{\mathrm{d}^2 N_3}{\mathrm{d}s^2} & \frac{\mathrm{d}^2 N_4}{\mathrm{d}s^2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \mathrm{d}s$$

$$- \begin{pmatrix}\delta v_1 & \delta\theta_1 & \delta v_2 & \delta\theta_2\end{pmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\delta v_1 & \delta\theta_1 & \delta v_2 & \delta\theta_2\end{pmatrix} \left[\frac{8EI}{L^3}\int_{-1}^{1} \begin{Bmatrix} \frac{\mathrm{d}^2 N_1}{\mathrm{d}s^2} \\ \frac{\mathrm{d}^2 N_2}{\mathrm{d}s^2} \\ \frac{\mathrm{d}^2 N_3}{\mathrm{d}s^2} \\ \frac{\mathrm{d}^2 N_4}{\mathrm{d}s^2} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}^2 N_1}{\mathrm{d}s^2} & \frac{\mathrm{d}^2 N_2}{\mathrm{d}s^2} & \frac{\mathrm{d}^2 N_3}{\mathrm{d}s^2} & \frac{\mathrm{d}^2 N_4}{\mathrm{d}s^2} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \mathrm{d}s - \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} \right]$$

Ainsi

$$\left[K_{(i)}\right] = \frac{8EI}{L^3}\int_{-1}^{1} \begin{pmatrix} \frac{3}{2}s \\ -\frac{L}{4}+\frac{3}{4}Ls \\ -\frac{3}{2}s \\ \frac{L}{4}+\frac{3}{4}Ls \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{2}s & -\frac{L}{4}+\frac{3}{4}Ls & -\frac{3}{2}s & \frac{L}{4}+\frac{3}{4}Ls \end{pmatrix} \mathrm{d}s \qquad \text{et} \qquad \left\{F_{(i)}\right\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}$$

Finalement

$$\left[K_{(i)}\right] = \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{pmatrix}$$

Ajout d'une force répartie

On ajoute maintenant au modèle précédent une force par unité de longueur $q(x)$, répartie le long de la poutre (ce chargement $q(x)$ est homogène au niveau des unités en des N/m).

Ce chargement réparti $q(x)$ permet par exemple de modéliser le poids propre de la poutre dans le champ de gravité. De manière plus générale, $q(x)$ peut avoir une variation quelconque.

Introduisant une force répartie, le modèle devient

$$EI\frac{\mathrm{d}^4 v}{\mathrm{d}x^4} = q(x) \iff EI\frac{\mathrm{d}^4 v}{\mathrm{d}x^4} - q(x) = 0.$$

Notons $\{G\}$ l'apport de force de volume.

$$\begin{aligned}\langle \delta U_n \rangle \left\{G_{(i)}\right\} &= \int_{x_1}^{x_2} \delta v(x) q(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \begin{pmatrix}\delta v_1 & \delta\theta_1 & \delta v_2 & \delta\theta_2\end{pmatrix} \begin{Bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \\ N_3(x) \\ N_4(x) \end{Bmatrix} q(x)\,\mathrm{d}x \\ \left\{G_{(i)}\right\} &= \int_{x_1}^{x_2} \begin{Bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \\ N_3(x) \\ N_4(x) \end{Bmatrix} q(x)\,\mathrm{d}x = \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} \begin{Bmatrix} N_1(s) \\ N_2(s) \\ N_3(s) \\ N_4(s) \end{Bmatrix} q(x(s))\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} \begin{Bmatrix} N_1(s) \\ N_2(s) \\ N_3(s) \\ N_4(s) \end{Bmatrix} q(x(s))\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

Si q est constante, alors

$$\left\{G_{(i)}\right\} = \frac{L}{2} q \int_{-1}^{1} \begin{Bmatrix} N_1(s) \\ N_2(s) \\ N_3(s) \\ N_4(s) \end{Bmatrix} \mathrm{d}s\,.$$

Finalement

$$\{F_i\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} + \left\{G_{(i)}\right\}\,.$$

Exemple 6.1. *On considère un cas pratique (figure ci-dessous) de poutre encastré, de longueur $1\,m$ soumise à une charge répartie constante $q = 120\,N/m$, ainsi qu'à un moment $C = 50\,N.M$ à son extrémité.*

On considère également que $EI = 1\,000\,N.m^2$.

Résultat important

Si on considère un élément poutre ne travaillant qu'en flexion, de longueur L, le moment d'inertie I de section A et de module de Young E, chargée par deux forces ponctuelles F_1 et F_2 et deux moments ponctuels M_1 et M_2.

La matrice de rigidité locale est donnée par

$$\left[K_{(i)}\right] = \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{pmatrix}$$

et le vecteur force local est

$$\left\{F_{(i)}\right\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} + \frac{L}{2}\int_{-1}^{1} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3}{4}s + \frac{1}{4}s^3 \\ \frac{L}{8} - \frac{L}{8}s - \frac{L}{8}s^2 + \frac{L}{8}s^3 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{4}s - \frac{1}{4}s^3 \\ -\frac{L}{8} - \frac{L}{8}s + \frac{L}{8}s^2 + \frac{L}{8}s^3 \end{pmatrix} q(x(s))\,\mathrm{d}s$$

Pour q constante

$$\left\{F_{(i)}\right\} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ M_1 \\ F_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} + \frac{qL}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{L}{6} \\ 1 \\ -\frac{L}{6} \end{pmatrix}$$

6.3 Élément de poutre en tension et flexion combinées

6.3.1 Introduction

On considère maintenant une poutre définie le long de l'axe x, entre x_1 et x_2, travaillant à la fois en tension et en flexion, c'est-à-dire que l'on a sur cette poutre un chargement qui induit à la fois un effort normal, un effort tranchant et un moment fléchissant.

Les paramètres caractérisant le matériau et la géométrie de la barre sont les suivants : I, A, E et L.

On considère deux types de chargement appliquées à la poutre tels que illustré sur la figure. D'abord, les forces ponctuelles F_{x_1} et F_{x_2} appliquées aux deux extrémités, induisant un effort normal. Ensuite, on a les forces ponctuelles F_{y_1} et F_{y_2} appliquées également aux extrémités, induisant un effort tranchant et un moment fléchissant. On considère également les moments M_1 et M_2 appliqués aux deux extrémités.

On a trois composantes d'effort par nœud ($F_{x_1},\ F_{y_1}$ et M_1, par exemple pour le nœud 1). Cela entraîne que l'on a trois degrés de liberté

- $u_1,\ v_1,\ \theta_1$ pour le nœud 1 ;
- $u_2,\ v_2,\ \theta_2$ pour le nœud 2.

6.3.2 Matrice de rigidité et vecteur force

Pour un élément de barre, en négligeant les forces réparties, on a vu que l'on a la réalisation suivante

$$\frac{EA}{L} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{x_1} \\ F_{x_2} \end{Bmatrix}$$

Pour un élément de poutre en flexion uniquement, toujours en négligeant les forces réparties, on a vu que l'on a la relation

$$\frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{y_1} \\ M_1 \\ F_{y_2} \\ M_2 \end{Bmatrix}.$$

On en déduit facilement la relation globale reliant les efforts au degré de liberté pour l'élément

de poutre superposant ces deux comportements

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}}_{U} = \underbrace{\begin{Bmatrix} F_{x_1} \\ F_{y_1} \\ M_1 \\ F_{x_2} \\ F_{y_2} \\ M_2 \end{Bmatrix}}_{F}$$

Résultat important

Si on considère un élément de poutre travaillant en flexion et en tension, de longueur L, du moment d'inertie de section I, de section A et de matériau de module de Young E, chargé par des forces ponctuelles $F_{x_1},\ F_{y_1},\ F_{x_2}$ et F_{y_2}, et deux moments ponctuels M_1 et M_2.

Le comportement de ce type d'élément est représenté par l'égalité $AU = F$.

6.4 Extension des formations en dimension 2 et en dimension 3

Dans les paragraphes précédents, nous avons vu les modèles de barre et de poutre confinés le long de l'axe x, entre les coordonnées x_1 et x_2.

Dans une structure réelle, les éléments sont répartis à travers le plan (pour un treillis, pour une structure en deux dimensions) ou à travers l'espace (pour un treillis, pour une structure en trois dimensions).

Prenons l'exercice dans le plan, pour un élément de barre tel que illustré.

On définit deux repères de coordonnées, le repère (x, y) et le repère global qui représente le plan dans lequel la structure est définie.

Le repère (x, y) quant à lui est un repère qui est local à l'élément barre.

Passage en dimension deux

Soit $u_1,\ v_1,\ u_2$ et v_2 les composantes de déplacement aux nœuds 1 et 2 exprimés dans le repère global. Soit $F_{x_1},\ F_{y_1},\ F_{x_2}$ et F_{y_2} les composantes des forces aux nœuds 1 et 2 exprimés dans le repère global.

Posons

$$\left[K'_{(i)}\right] = \frac{EA}{L}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad [P] = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

et soit $\left[K'_{ixy}\right]$ la matrice de rigidité locale de l'élément de barre dans le repère global (X, Y).

On montre que

$$\left[K'_{(i)xy}\right] = [P]^{-1}\left[K'_{(i)}\right][P].$$

Finalement

$$\left[K'_{(i)xy}\right] = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} [A] & -[A] \\ -[A] & [A] \end{bmatrix}; \quad \text{avec} \quad [A] = \begin{pmatrix} C^2\phi & C\phi S\phi \\ C\phi S\phi & S^2\phi \end{pmatrix}, \quad \text{où } C\phi = \cos\phi \text{ et } S\phi = \sin\phi$$

Passage en trois dimensions

Si on note (X_1, Y_1, Z_1) et (X_2, Y_2, Z_2) les coordonnées des nœuds 1 et 2 dans le repère global (X, Y, Z), on a :

$$L^2 = (X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2$$

et la matrice de rigidité local de l'élément de barre dans le repère global est donnée par

$$\left[K'_{(i)XYZ}\right] = \frac{EA}{L}\begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma & -\alpha^2 & -\alpha\beta & -\alpha\gamma \\ \alpha\beta & \beta^2 & \beta\gamma & -\alpha\beta & -\beta^2 & -\beta\gamma \\ \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2 & -\alpha\gamma & -\beta\gamma & -\gamma^2 \\ -\alpha^2 & -\alpha\beta & -\alpha\gamma & \alpha^2 & \alpha\beta & \alpha\gamma \\ -\alpha\beta & -\beta^2 & -\beta\gamma & \alpha\beta & \beta^2 & \beta\gamma \\ -\alpha\gamma & -\beta\gamma & -\gamma^2 & \alpha\gamma & \beta\gamma & \gamma^2 \end{pmatrix}$$

où

$$\alpha = \frac{X_2 - X_1}{L}, \quad \beta = \frac{Y_2 - Y_1}{L} \text{ et } \gamma = \frac{Z_2 - Z_1}{L}.$$